
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2012/2013

Ogos 2013

MGM 562 – Probability Theory
[Teori Kebarangkalian]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

Arahan: Jawab **semua enam** [6] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Let X be a random variable having the distribution as follows

$$f_X(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\alpha \theta^\alpha}{x + \theta} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let $Y = \ln\left(\frac{X + \theta}{\theta}\right)$.

- (a) Find the distribution of Y . [7 marks]
- (b) Find the moment generating function of Y . [3 marks]
- (c) Hence, using (b), find mean of X . [3 marks]
- (d) It is shown that $E(X) = \frac{\theta}{\alpha - 1}$. Find $E(Y)$. [10 marks]

1. Biarkan X sebagai pembolehubah rawak yang mempunyai taburan seperti berikut

$$f_X(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\alpha \theta^\alpha}{x + \theta} & x > 0 \\ 0 & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Biarkan $Y = \ln\left(\frac{X + \theta}{\theta}\right)$.

- (a) Cari taburan bagi Y . [7 markah]
- (b) Cari fungsi penjana momen bagi Y . [3 markah]
- (c) Maka, dengan menggunakan (b), cari min bagi X . [3 markah]
- (d) Ditunjukkan bahawa $E(X) = \frac{\theta}{\alpha - 1}$. Cari $E(Y)$. [10 markah]

2. Given the function of $f(x)$, has

- (a) Show that X is a random variable. [4 marks]
- (b) Find mean of X . [5 marks]
- (c) Let X_1 and X_2 be independent and identical distribution as above, and $Y = X_1 + X_2$, find $E(Y)$. [5 marks]

2. Diberi suatu fungsi, $f(x)$, mempunyai

- (a) Tunjukkan bahawa adalah suatu pembolehubah rawak. [4 markah]
- (b) Cari min bagi [5 markah]
- (c) Biarkan dan adalah taburan tidak bersandar dan secaman seperti di atas, dan , cari . [5 markah]

3. Let the jointly variable of and has the function of

- (a) Show that the function above is a random variable. [4 marks]
- (b) Find the marginal distribution of . [5 marks]
- (c) Find . [3 marks]
- (d) What is ? [7 marks]

3. Biarkan pembolehubah tercantum dan mempunyai fungsi

- (a) Tunjukkan bahawa fungsi di atas adalah pembolehubah rawak. [4 markah]
- (b) Cari taburan sut bagi . [5 markah]
- (c) Cari . [3 markah]
- (d) Apakah ? [7 markah]

4. Let , and be the independent random variables with their respective moment generating functions as follows:

$$M_A(t) = 1 - 2t^{-3}$$

$$M_B(t) = 1 - 2t^{-5}$$

$$M_C(t) = 1 - 2t^{-4}$$

Let , and skewness coefficient, , is defined as _____, where is the mean and is the standard deviation of .

- (a) Find moment generating function of X , Y . [3 marks]
- (b) Calculate $\text{Cov}(X, Y)$ for X, Y . [6 marks]
- (c) Find ρ_{XY} and finally, $\text{Corr}(X, Y)$. [2 marks]
- (d) Find $\text{Var}(X + Y)$. [6 marks]

4. Biarkan X, Y, Z dan W adalah pemboleh-pemboleh ubah tidak bersandar dengan fungsi penjana momen masing-masing seperti berikut:

$$M_A(t) = 1 - 2t^{-3}$$

$$M_B(t) = 1 - 2t^{-5}$$

$$M_C(t) = 1 - 2t^{-4}$$

Biarkan X, Y, Z dan W adalah pemboleh-pemboleh ubah tidak bersandar dengan fungsi penjana momen masing-masing seperti berikut, dan pekali kepencongan, ditakrifkan sebagai $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$, yang mana $\text{Cov}(X, Y)$ adalah min dan $\text{Var}(X)$ adalah sisihan piawai bagi X .

- (a) Cari fungsi penjana momen bagi X, Y, Z dan W . [3 markah]
- (b) Kira $\text{Cov}(X, Y)$ bagi X, Y, Z dan W . [6 markah]
- (c) Cari ρ_{XY} dan akhirnya, $\text{Corr}(X, Y)$. [2 markah]
- (d) Cari $\text{Var}(X + Y)$. [6 markah]

5. Let X be the Poisson distribution with parameter λ .

- (a) Derive the moment generating function of X . [4 marks]
- (b) Hence, derive the mean and the second moment of X . [6 marks]
- (c) Let Y has a Poisson distribution with mean 10, and let Z has a Poisson distribution with mean 5. Find the $\text{Cov}(Y, Z)$. [5 marks]

5. Biarkan X menjadi taburan Poisson dengan parameter λ .

- (a) Dapatkan fungsi penjana momen bagi X . [4 markah]
- (b) Sekarang, dapatkan min dan momen kedua bagi X . [6 markah]
- (c) Biarkan Y mempunyai taburan Poisson dengan min 10, dan biarkan Z mempunyai taburan Poisson dengan min 5. Cari momen kedua bagi Y, Z . [5 markah]

6. A car dealership sells 0, 1, or 2 luxury cars on any day. When selling a car, the dealer also tries to persuade the customer to buy an extended warranty for the car. Let denote the number of luxury cars sold in a given day, and let denote the number of extended warranties sold. The joint distributions for and are given as follows:-

$$\begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix}$$

Find

(a) and ,

[6 marks]

(b)

[6 marks]

6. Seorang wakil jual kereta menjual 0, 1, atau 2 kereta mewah pada mana-mana hari. Apabila menjual sebuah kereta, wakil jual kereta itu juga cuba untuk memujuk pelanggannya untuk melangani lanjutan jaminan bagi kereta tersebut. Biarkan adalah bilangan kereta mewah yang dijual dalam sehari, dan biarkan adalah bilangan lanjutan jaminan kereta dijual. Kebarangkalian tercantum bagi dan diberikan seperti berikut:-

$$\begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix}$$

Cari

(a) dan ,

[6 markah]

(b)

[6 markah]

Appendix

| Random Variable, | Probability distribution function, | Mean, | Variance, | Moment Generating Function, |
|------------------|------------------------------------|-------|-----------|-----------------------------|
| | — | — | — | — |
| | - | | | |
| | | | | |
| | — - — | | | — |
| | — - - | | | |
| | — | | | |

| | |
|--|--|
| <p>Arithmetic series</p> <p>—</p> <p>Geometric series</p> <p>—</p> | <p>Binomial series</p> <p>Taylor Series</p> <p>—</p> |
|--|--|