
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
2012/2013 Sidang Akademik

Ogos 2013

MGM 502 – Number Theory
[Teori Nombor]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all nine** [9] questions.

Arahan : Jawab **semua sembilan** [9] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Given $f(x) = x^3 + 15x^2 + 81x + 148$. Find all roots of $f(x) = 0$ using Cardano's formula.

[15 marks]

1. Diberikan $f(x) = x^3 + 15x^2 + 81x + 148$. Cari semua punca $f(x) = 0$ menggunakan rumus Cardano.

[15 markah]

2. State Peano's Axiom and the definitions of addition and multiplication in $\mathbb{N}$. Hence, use these definitions to prove that the distributive property $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ is satisfied on $\mathbb{N}$.

[10 marks]

2. Nyatakan Aksiom Peano serta takrifan penambahan dan pendaraban dalam $\mathbb{N}$. Dengan demikian, gunakan takrifan ini untuk membuktikan bahawa hukum taburan $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dipatuhi atas $\mathbb{N}$.

[10 markah]

3. Define divisibility on $\mathbb{N}$. Hence, prove or disprove the following:

- (a) $1|a \quad \forall a \in \mathbb{N}$.
(b) $a|0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$.
(c) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, a|b \text{ and } c|d \Rightarrow (a+c)|(b+d)$.

[10 marks]

3. Takrifkan pembahagian atas $\mathbb{N}$. Dengan demikian, buktikan atau sangkalkan kenyataan berikut:

- (a) $1|a \quad \forall a \in \mathbb{N}$.
(b) $a|0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$.
(c) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, a|b \text{ dan } c|d \Rightarrow (a+c)|(b+d)$.

[10 markah]

4. Define the term “relatively prime”. Hence, prove or disprove the following statement:

Given a , b and c are three different positive integers. If a and b are relatively prime, and b and c are also relatively prime, then a and c must be relatively prime as well.

[10 marks]

4. Takrifkan istilah “perdana secara relatif”. Dengan demikian, buktikan atau sangkalkan pernyataan berikut:

Diberikan a , b dan c merupakan integer positif berbeza. Jika a dan b perdana secara relatif, dan b dan c juga perdana secara relatif, maka a dan c perdana secara relatif juga.

[10 markah]

5. Show that the square of any odd integer has the form $8k+1$ for some integer k .

[10 marks]

5. Tunjukkan bahawa kuasa dua bagi sebarang integer ganjil mempunyai bentuk $8k+1$ untuk sesuatu integer k .

[10 markah]

6. Given $a = 49507127$ and $b = 58252151$, find (a,b) and write it in the form $\alpha a + \beta b$ for some integers α and β . Hence solve the Diophantine equation $ax + by = 9848$.

[15 marks]

6. Diberikan $a = 49507127$ dan $b = 58252151$, cari (a,b) dan tuliskannya dalam bentuk $\alpha a + \beta b$ bagi integer α dan β . Dengan demikian selesaikan persamaan Diophantine $ax + by = 9848$.

[15 markah]

7. (a) Find the number of positive factors of 11200 and the sum of all these factors.
- (b) Given $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ where p, q, r, s are distinct primes and $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, find the smallest possible value of n if it has exactly 1155 positive factors.

[10 marks]

7. (a) Cari bilangan faktor positif bagi 11200 serta hasil tambah semua faktor ini.
- (b) Diberikan $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ dengan p, q, r, s nombor perdana berbeza, dan $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, cari nilai terkecil mungkin bagi n sekiranya ia mempunyai tepat 1155 faktor positif.

[10 markah]

8. (i) Find the remainder obtained when 123456789 is divided by 13.
- (ii) Hence, find the remainder obtained when 123456789^{2013} is divided by 13.

[10 marks]

8. (i) Cari baki yang diperoleh apabila 123456789 dibahagi oleh 13.
- (ii) Dengan demikian, cari baki yang diperoleh apabila 123456789^{2013} dibahagi oleh 13.

[10 markah]

9. Solve the following system of linear congruences:

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$6x \equiv 8 \pmod{13}$$

[10 marks]

9. Selesaikan sistem kongruen linear berikut:

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$6x \equiv 8 \pmod{13}$$

[10 markah]