

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2011/2012 Academic Session

June 2012

**MAA 101 – Calculus for Science Students**  
***[Kalkulus untuk Pelajar Sains]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all eight** [8] questions.

**[Arahan:** Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. Let  $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ ,  $x \in [-1, 4]$ .
- (a) Sketch the graph of  $f(x)$  by applying the appropriate transformations of the graph of  $y = x^2$ . Show all the steps of the graph sketching. State the range of  $f(x)$ .
- (b) Hence, sketch the graph of  $|f(x)|$ . State the domain and range of  $|f(x)|$ .

[8 marks]

1. Biarkan  $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ ,  $x \in [-1, 4]$ .
- (a) Lakarkan graph bagi  $f(x)$  dengan menggunakan tranformasi yang sesuai graf bagi  $y = x^2$ . Paparkan semua langkah-langkah lakaran graf. Nyatakan julat bagi  $f(x)$ .
- (b) Seterusnya, lakarkan graf bagi  $|f(x)|$ . Nyatakan domain dan julat bagi  $|f(x)|$ .

[8 markah]

2. Given a function  $g(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$
- (a) Determine whether  $g$  is one-to-one function or not. If one-to-one, find its inverse function,  $g^{-1}$ .
- (b) Show that  $g$  continuous at  $x = 1$ .
- (c) Sketch the graph of  $g(x)$  and  $g^{-1}(x)$ , if  $g^{-1}$  exist.

[10 marks]

2. Diberikan suatu fungsi  $g(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$
- (a) Tentukan samada  $g$  fungsi satu ke satu atau tidak? Jika ya, cari fungsi songsangannya,  $g^{-1}$ .
- (b) Tunjukkan bahawa  $g$  selanjar pada  $x = 1$ .
- (c) Lakarkan graf bagi  $g(x)$  dan  $g^{-1}(x)$ , jika  $g^{-1}$  wujud.

[10 markah]

3. Evaluate the following limits, if the limits exist.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + x^{1/x}$

[12 marks]

3. *Nilaikan had-had berikut, jika had-had berikut wujud.*

(a) *had*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

(b) *had*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$

(c) *had*  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + x^{1/x}$

[12 markah]

4. Given a function  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{4 - x^2}$ .

(a) Determine whether the function  $f$  is even, odd or neither even nor odd.

(b) Find the critical number(s) of  $f$ .

(c) Find the absolute extremum value(s) of a function  $h$ , if  $h(x) = (4 - x^2)f(x)$  continuous on  $[-1, 2]$ .

[13 marks]

4. *Diberi suatu fungsi  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{4 - x^2}$*

(a) *Tentukan samada  $f$  suatu fungsi genap, ganjil atau bukan kedua-duanya.*

(b) *Dapatkan nombor kritikal bagi  $f$ .*

(c) *Dapatkan nilai-nilai eksremum mutlak bagi fungsi  $h$ , jika  $h(x) = (4 - x^2)f(x)$  selanjar pada  $[-1, 2]$ .*

[13 markah]

5. (a) Given a function  $f(x) = x^3 - x - 1$ ,  $x \in [0, 2]$ .

(i) Show that  $f$  satisfies the Mean Value Theorem.

(ii) Find all value(s)  $c$  such that  $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ .

(b) Let  $f(x) = x^2 - a$ , where  $a$  is a constant.

(i) Applying Newton's Method, show that,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

(ii) Approximate the value  $\sqrt{10}$ , if  $\sqrt{a} \approx x_{n+1}$ . Use the starting value,  $x_1 = 3$ .

[14 marks]

5. (a) Diberi suatu fungsi  $f(x) = x^3 - x - 1$ ,  $x \in [0, 2]$ .

(i) Tunjukkan bahawa  $f$  memenuhi Teorem Nilai Min.

(ii) Dapatkan semua nilai  $c$  supaya  $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ .

(b) Biarkan  $f(x) = x^2 - a$ , yang mana  $a$  ialah suatu pemalar.

(i) Menggunakan Kaedah Newton tunjukkan bahawa  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ,  
 $n = 1, 2, 3, \dots$ .

(ii) Anggarkan nilai  $\sqrt{10}$ , jika  $\sqrt{a} \approx x_{n+1}$ . Gunakan nilai permulaan,  $x_1 = 3$ .

[14 markah]

6. Evaluate the following integral.

(a)  $\int_0^3 |x - 2| dx$

(b)  $\int \frac{1}{1 + 16x^2} dx$

(c)  $\int_0^\pi x \cos x dx$

(d)  $\int \frac{13x + 3}{x^2 + 4x + 3} dx$

[19 marks]

6. *Nilaikan kamiran berikut.*

(a)  $\int_0^3 |x-2| dx$

(b)  $\int \frac{1}{1+16x^2} dx$

(c)  $\int_0^{\pi} x \cos x dx$

(d)  $\int \frac{13x+3}{x^2+4x+3} dx$

[19 markah]

7. Let  $F$  be a continuous and differentiable function on  $(0, \infty)$  defined by

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Show that  $F$  is a constant function using the Fundamental Theorem of Calculus.

[6 marks]

7. *Biarkan  $F$  suatu fungsi selanjur dan bolehbeza pada  $(0, \infty)$  ditakrif sebagai*

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

*Tunjukkan bahawa  $F$  ialah suatu fungsi pemalar dengan menggunakan Teorem Asas Kalkulus.*

[6 markah]

8. Sketch the region  $R$ , bounded by the given curves. Find **without** evaluating the integral that represents the bounded area  $R$  and volume of the solid obtained by rotating the region  $R$  about the specified line.

(a)  $y = x$  and  $y = \sqrt{x}$ ; about the line  $x = 2$ .

(b)  $y = x^2 - 4x + 7$  and  $y = 4(x-2)^2$ ; about the  $y$ -axis.

(c)  $x = 3y^2 - 2$  and  $x = y^2$ ; about the  $x$ -axis.

[18 marks]

8. *Lakarkan kawasan  $R$  yang dibatasi oleh lengkung-lengkung yang diberi. Dapatkan **tanpa** menilaikan kamiran yang mewakili luas  $R$  yang dibatasi dan isipadu bongkah yang diperolehi apabila kawasan  $R$  dikisarkan pada garis yang ditentukan.*

(a)  $y = x$  dan  $y = \sqrt{x}$ ; pada garis  $x = 2$ .

(b)  $y = x^2 - 4x + 7$  dan  $y = 4(x-2)^2$ ; pada paksi- $y$ .

(c)  $x = 3y^2 - 2$  dan  $x = y^2$ ; pada paksi- $x$ .

[18 markah]