
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang akademik 2011/2012

June 2012

MAT 202 Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all seven** [7] questions.

*[Arahan: Jawab **semua tujuh** [7] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. (a) Give the statement of the Completeness Axiom for $\mathbb{R}$.

(b) Suppose that S is a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$. Define

$$-S = \{-s : s \in S\}.$$

Show that $\inf(-S) = -\sup(S)$, where $\sup(X)$ and $\inf(X)$ denote the supremum and the infimum of X , respectively.

[12 marks]

1. (a) Beri pernyataan untuk Aksiom Kelengkapan bagi $\mathbb{R}$.

(b) Biar S suatu subset tak kosong yang terbatas pada $\mathbb{R}$. Takrifkan

$$-S = \{-s : s \in S\}.$$

Tunjukkan bahawa $\inf(-S) = -\sup(S)$, dengan $\sup(X)$ dan $\inf(X)$ masing-masing menandai supremum dan infimum bagi X .

[12 markah]

2. (a) If a is a rational number and b is an irrational number, show that $a + b$ is an irrational number.

(b) Prove that $\sqrt{2}$ is not a rational number.

(c) For a real number x , if x^2 is an irrational number, show that x is an irrational number. Thus deduce that $1 + \sqrt{2}$ is an irrational number.

[18 marks]

2. (a) Jika a nombor nisbah dan b nombor tak nisbah, tunjukkan bahawa $a + b$ nombor tak nisbah.

(b) Buktikan bahawa $\sqrt{2}$ bukan nombor nisbah.

(c) Untuk nombor nyata x , jika x^2 nombor tak nisbah, tunjukkan x juga nombor tak nisbah. Dengan itu deduksikan bahawa $1 + \sqrt{2}$ nombor tak nisbah.

[18 markah]

3. (a) If $\{a_n\}$ is a bounded sequence and $\{b_n\}$ a sequence converges to 0, does the sequence $\{a_nb_n\}$ converge? Prove it if it is convergent and find its limit. If not, give a counterexample.

- (b) Consider the sequence $\{a_n\}$ where

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{a_n + 2} \quad (n \geq 1).$$

- (i) Show by induction that $a_n^2 > 3$ for all n .
 (ii) Show that $\{a_n\}$ is monotonic decreasing.
 (iii) Find $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

[20 marks]

3. (a) Jika $\{a_n\}$ jujukan terbatas dan $\{b_n\}$ jujukan yang menumpu ke 0, adakah jujukan $\{a_nb_n\}$ menumpu? Buktikan jika ia menumpu dan cari hadnya. Jika tidak, beri satu contoh lawan.

- (b) Pertimbangkan jujukan $\{a_n\}$ dengan

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{a_n + 2} \quad (n \geq 1).$$

- (i) Tunjukkan secara aruhan bahawa $a_n^2 > 3$ untuk semua n .
 (ii) Tunjukkan bahawa $\{a_n\}$ menyusut secara berekanada.
 (iii) Cari $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

[20 markah]

4. (a) For the set $A = (0, 1] - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
 (i) find its interior points,
 (ii) find its limit points,
 (iii) determine whether A is open or closed,
 (iv) determine whether A is compact,
 (v) determine whether A is connected.

- (b) If X is a nonempty closed subset of $\mathbb{R}$ and $a \notin X$, show that there exists a positive number ϵ such that $|a - x| > \epsilon$ for all x in X .

[15 marks]

4. (a) Untuk set $A = (0, 1] - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
 (i) cari titik pedalamannya,
 (ii) cari titik hadnya,
 (iii) tentukan sama ada A terbuka atau tertutup,
 (iv) tentukan sama ada A padat,
 (v) tentukan sama ada A terkait.
- (b) Jika X set tak kosong dan tertutup pada $\mathbb{R}$ dan $a \notin X$, tunjukkan bahawa wujud nombor positif ϵ supaya $|a - x| > \epsilon$ untuk semua x dalam X .

[15 markah]

5. Suppose that the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous at 0 and

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad \text{for all } a, b \in \mathbb{R}.$$

- (i) Prove that $f(0) = 0$.
 (ii) Show that f is continuous at each real number x .
 (iii) If f is also differentiable at 0, show that $f'(x) = f'(0)$ for each x in $\mathbb{R}$.

[15 marks]

5. Andaikan fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selanjar pada 0 dan

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad \text{untuk semua } a, b \in \mathbb{R}.$$

- (i) Buktikan bahawa $f(0) = 0$.
 (ii) Tunjukkan bahawa f selanjar pada setiap nombor nyata x .
 (iii) Jika f juga terbezakan pada 0, tunjukkan bahawa $f'(x) = f'(0)$ untuk setiap x pada $\mathbb{R}$.

[15 markah]

6. (a) Let f be Riemann integrable on $[a, b]$ and define $F(x) = \int_a^x f$ for x in $[a, b]$.

- (i) Evaluate $G(x) := \int_c^x f$ in terms of F , where $c \in [a, b]$.
 (ii) Evaluate $H(x) := \int_x^b f$ in terms of F .

- (b) If $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and $c > 0$, define $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by $g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t) dt$. Show that g is differentiable on $\mathbb{R}$ and find $g'(x)$.

[15 marks]

6. (a) Biar f terkamirkan secara Riemann pada $[a, b]$ dan takrifkan $F(x) = \int_a^x f$ untuk x dalam $[a, b]$.
 (i) Nilaikan $G(x) := \int_c^x f$ dalam sebutan F , dengan $c \in [a, b]$.
 (ii) Nilaikan $H(x) := \int_x^b f$ dalam sebutan F .
- (b) Jika $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selanjar dan $c > 0$, takrifkan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai $g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t) dt$. Tunjukkan bahawa g terbezakan pada $\mathbb{R}$ dan cari $g'(x)$.

[15 markah]

7. (a) Give an example of a sequence $\{f_n\}$ of continuous functions that converges to f on A but f is not continuous on A . What is the condition needed to guarantee the continuity of f on A ?
- (b) (i) Show that the series of functions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ converges uniformly on $\mathbb{R}$.
 (ii) If $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, is f continuous on $\mathbb{R}$? Give your reason.
 (iii) Show that $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{-1} \left(\frac{1}{n} \right)$.

[15 marks]

7. (a) Beri satu contoh jujukan $\{f_n\}$ fungsi selanjar yang menumpu ke f pada A tetapi f tak selanjar pada A . Apakah sifat yang diperlukan untuk menjamin keselanjaran f pada A ?
- (b) (i) Tunjukkan bahawa siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$.
 (ii) Jika $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, adakah f selanjar pada $\mathbb{R}$? Berikan alasan anda.
 (iii) Tunjukkan bahawa $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{-1} \left(\frac{1}{n} \right)$.

[15 markah]