
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2011/2012 Academic Session

June 2012

MSS 318 - Discrete Mathematics
[*Matematik Diskrit*]

Duration : 3 hours
[*Masa : 3 jam*]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

[Arahan: Jawab semua lapan [8] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

(1) Let n and r be non-negative integers with $n \geq r$. Show that

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}.$$

[6 marks]

(1) *Biar n dan r integer tak negatif dengan $n \geq r$. Tunjukkan bahawa*

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}.$$

[6 markah]

(2) Suppose repetitions are not permitted. There are six digits 3, 4, 5, 6, 7, 9.

- (a) How many three-digit numbers can be formed?
- (b) How many three-digit numbers are less than 600?
- (c) How many three-digit numbers are even?
- (d) How many three-digit numbers are odd?
- (e) How many three-digit numbers are multiples of 6?

[10 marks]

(2) *Andaikan pengulangan adalah tidak dibenarkan. Terdapat enam-digit 3, 4, 5, 6, 7, 9.*

- (a) *Berapa banyakkah nombor tiga-digit yang boleh dibina?*
- (b) *Berapa banyakkah nombor tiga-digit yang kurang daripada 600?*
- (c) *Berapa banyakkah nombor tiga-digit yang genap?*
- (d) *Berapa banyakkah nombor tiga-digit yang ganjil?*
- (e) *Berapa banyakkah nombor tiga-digit dengan gandaan 6?*

[10 markah]

(3) For the graphs mentioned in the following statements, give an example or prove that there is no such graph:

- (a) A simple graph with 5 vertices and 14 edges.
- (b) A simple graph with 6 vertices, whose degrees are 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- (c) A graph with 6 vertices that has an Euler circuit but no Hamiltonian circuit.
- (d) A simple directed graph with in-degrees 0, 1, 2, 2, 3, 4 and out-degrees 1, 1, 2, 3, 4.

[12 marks]
...3/-

(3) Bagi graf yang dinyatakan dalam pernyataan berikut, beri satu contoh atau buktikan tidak terdapat graf sedemikian:

- (a) Suatu graf ringkas dengan 5 bucu dan 14 sisi.
- (b) Suatu graf ringkas dengan 6 bucu yang mana darjahnya adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- (c) Suatu graf dengan 6 bucu yang mempunyai litar Euler tetapi tiada litar Hamiltonian.
- (d) Suatu graf berarah dengan darjah masuk 0, 1, 2, 2, 3, 4 dan darjah keluar 1, 1, 2, 2, 3, 4.

[12 markah]

(4) Determine the number of solutions for the following.

- (a) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$
- (b) $x_1 + x_2 = 10, \quad 0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 7.$
- (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 10, \quad x_1 \leq 5.$

[12 marks]

(4) Tentukan bilangan penyelesaian yang berikut.

- (a) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$
- (b) $x_1 + x_2 = 10, \quad 0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 7.$
- (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 10, \quad x_1 \leq 5.$

[12 markah]

(5) You have borrowed RM 10,000 from a bank. Suppose you want to repay a fixed amount of money for each of the following n years (except possibly the last year). The annual interest rate r does not change in these n years. For example, if $r = 10\%$ and you repay RM 4,000 each year, then you will owe the bank RM $(10,000 + 1,000 - 4,000) =$ RM 7,000 next year, RM $(7,000 + 700 - 4,000) =$ RM 3,700 two years after, RM $(3,700 + 370 - 4,000) =$ RM 70 three years after and finally you only need to repay RM $(70 + 7) =$ RM 77.

- (a) If $r = 10\%$ and you want to repay all the money in 10 years, how much money do you need to pay each year?
- (b) If $r = 20\%$ and you want to repay RM 2,500 each year (except possibly the last year), how many years do you need to repay all the money?

[14 marks]

(5) Anda telah meminjam RM 10,000 daripada sebuah bank. Anda hendak membayar sejumlah wang yang tetap untuk setiap n tahun yang berikutnya (kecuali mungkin pada tahun yang akhir). Kadar interes tahunan r tidak berubah bagi n tahun tersebut. Sebagai contoh, jika $r = 10\%$ dan anda hendak membayar kembali sebanyak RM 4,000 setiap tahun, maka anda masih berhutang dengan bank RM $(10,000 + 1,000 - 4,000) = RM 7,000$ pada tahun berikutnya, $RM(7,000 + 700 - 4,000) = RM 3,700$ dua tahun kemudian, $RM(3,700 + 370 - 4,000) = RM 70$ tiga tahun kemudian dan akhirnya anda hanya perlu membayar $RM(70 + 7) = RM 77$.

- (a) Jika $r = 10\%$ dan anda hendak membayar keseluruhan wang dalam 10 tahun, berapakah wang yang perlu anda bayar setiap tahun?
- (b) Jika $r = 20\%$ dan anda hendak membayar RM 2,500 setiap tahun (kecuali mungkin pada tahun yang akhir), berapa tahunkah yang anda perlukan untuk membayar semua wang?

[14 markah]

- (6) (a) Let G be a graph with vertices v_1, v_2, \dots, v_m and edges e_1, e_2, \dots, e_n . Define
- (i) the incidence matrix of G .
 - (ii) the adjacency matrix of G .
- (b) Draw the graph G whose incidence matrix M is as follows:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (c) Draw the graph G whose adjacency matrix A is as follows:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[14 marks]

- (6) (a) Biar G suatu graf dengan bucu v_1, v_2, \dots, v_m dan sisi e_1, e_2, \dots, e_n . Takrifkan
- (i) matriks insidens bagi G .
 - (ii) matriks bersebelahan bagi G .
- (b) Lukis graf G yang mana matriks insidens M adalah seperti berikut:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

...5/-

(c) Lukis graf G yang mana matriks bersebelahan A adalah seperti berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[14 markah]

(7) (a) Prove the following theorem.

Theorem : The following are equivalent for a graph G :

- (i) G is 2-colorable
- (ii) G is bipartite
- (iii) Every cycle of G has even length

(b) Consider the bipartite graph $K_{2,4}$.

- (i) Draw the bipartite graph $K_{2,4}$.
- (ii) Find a 2-coloring of the graph.
- (iii) Find the six cycles of a vertex and show that they are even.

[22 marks]

(7) (a) Buktikan teorem yang berikut.

Teorem : Yang berikut adalah setara bagi suatu graf G :

- (i) G adalah 2-pewarnaan
- (ii) G adalah dwi-partisi
- (iii) Setiap kitar bagi G mempunyai panjang yang genap

(b) Pertimbangkan graf dwi partisi $K_{2,4}$.

- (i) Lukis graf dwi partisi $K_{2,4}$.
- (ii) Dapatkan 2-pewarnaan bagi graf tersebut.
- (iii) Dapatkan enam kitar bagi suatu bucu dan tunjukkan mereka adalah genap.

[22 markah]

(8) (a) Find all solutions of the recurrence relations

$$a_k = 3a_{k-1} + 2, \quad a_1 = 3.$$

(b) Use generating functions to solve the recurrence relation

$$a_k = 3a_{k-1}, \quad a_0 = 2.$$

[10 marks]

(8) (a) Dapatkan semua penyelesaian bagi hubungan jadi semula

$$a_k = 3a_{k-1} + 2, \quad a_1 = 3.$$

(b) Gunakan fungsi penjana untuk selesaikan hubungan jadi semula

$$a_k = 3a_{k-1}, \quad a_0 = 2.$$

[10 markah]