

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2011/2012 Academic Session

June 2012

**MSS 211 - Modern Algebra**  
**[Aljabar Moden]**

Duration : 3 hours  
[Masa : 3 jam]

---

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

*[Arahan: Jawab **semua six** [6] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]*

1. (a) State the definition of a group.
- (b) Is  $G = \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$  a group?
- (c) Is  $G = \langle \mathbb{Q} - \{0\}, \cdot \rangle$  a group?
- (d) Is  $G = \langle \mathbb{Q}^+, \cdot \rangle$  a group?

[8 marks]

1. (a) Nyatakan definisi suatu kumpulan.
- (b) Adakah  $G = \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$  suatu kumpulan?
- (c) Adakah  $G = \langle \mathbb{Q} - \{0\}, \cdot \rangle$  suatu kumpulan?
- (d) Adakah  $G = \langle \mathbb{Q}^+, \cdot \rangle$  suatu kumpulan?

[8 markah]

2. (a) State the definition of a subgroup.
- (b) Consider the group  $\mathbb{Z}$  of integers under addition operation. Let  $H$  be the subset of  $\mathbb{Z}$  consisting of all multiples of a positive integer  $m$  that is  $H = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$ . Show that  $H$  is a subgroup of  $\mathbb{Z}$ .
- (c) Show that any subgroup  $H$  of an abelian group  $G$  is normal.

[10 marks]

2. (a) Nyatakan definisi suatu subkumpulan.
- (b) Pertimbangkan kumpulan integer  $\mathbb{Z}$  dengan operasi penambahan. Biar  $H$  suatu subset bagi  $\mathbb{Z}$  dengan semua gandaan integer positif  $m$  iaitu  $H = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$ . Tunjukkan bahawa  $H$  adalah suatu subkumpulan bagi  $\mathbb{Z}$ .
- (c) Tunjukkan bahawa sebarang subkumpulan  $H$  bagi suatu kumpulan abelian  $G$  adalah normal.

[10 markah]

3. Let  $D_3 = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2) \rangle$ .
- (a) List all elements of  $D_3$ .
  - (b) Construct a multiplication table for  $D_3$ .
  - (c) From the table in (b),
    - (i) is  $D_3$  abelian? Verify your answer.
    - (ii) is  $D_3$  cyclic? Verify your answer.
  - (d) Give  $H$ , a normal subgroup of  $D_3$ .
  - (e) List all elements in  $D_3/H$ .

[20 marks]

3. Biar  $D_3 = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2) \rangle$ .
- (a) Senaraikan semua unsur bagi  $D_3$ .
  - (b) Bina suatu jadual pendaraban bagi  $D_3$ .
  - (c) Daripada jadual (b),
    - (i) adakah  $D_3$  abelian? Justifikasikan jawapan anda.
    - (ii) adakah  $D_3$  kitaran? Justifikasikan jawapan anda.
  - (d) Berikan  $H$ , suatu subkumpulan normal bagi  $D_3$ .
  - (e) Senaraikan semua unsur dalam  $D_3/H$ .

[20 markah]

4. Determine whether the following statements are true or false. Justify your answer.
- (a) Every abelian group is cyclic.
  - (b) Every subgroup of an abelian group is a normal subgroup.
  - (c)  $C_2 \times C_3$  is isomorphic to  $C_6$ .
  - (d)  $C_2 \times C_4$  is isomorphic to  $C_8$ .
  - (e) Every group of prime order is abelian.
  - (f) Every factor group of an abelian group is abelian.

[18 marks]

4. Tentukan sama ada pernyataan berikut adalah benar atau palsu. Tentusahkan jawapan anda.
- (a) Setiap kumpulan abelian adalah kumpulan kitaran.
  - (b) Setiap subkumpulan bagi kumpulan abelian adalah subkumpulan normal.
  - (c)  $C_2 \times C_3$  adalah berisomorfik dengan  $C_6$ .
  - (d)  $C_2 \times C_4$  adalah berisomorfik dengan  $C_8$ .
  - (e) Setiap kumpulan berperingkat perdana adalah abelian.
  - (f) Setiap kumpulan faktor bagi kumpulan abelian adalah abelian.

[18 markah]

5. (a) Consider the ring  $\mathbb{Z}$  of integers.
- (i) Is  $\mathbb{Z}$  commutative?
  - (ii) Does  $\mathbb{Z}$  have a unitary element?
  - (iii) What are the units in  $\mathbb{Z}$ ?
  - (iv) Is  $\mathbb{Z}$  a field? Verify your answer.
- (b) Find the units of  $\mathbb{Z}_m$ , the ring of integers modulo  $m$ .
- (c) Give all zero divisors in  $\mathbb{Z}_{12}$ .
- (d) Let  $M$  be a set of  $2 \times 2$  matrices with entries in a field  $\mathbb{F}$ . Show that  $M$  is non-commutative ring with unity.

[30 marks]

5. (a) *Pertimbangkan suatu gelanggang integer  $\mathbb{Z}$ .*
- (i) Adakah  $\mathbb{Z}$  kalis tukar tertib?*
  - (ii) Adakah  $\mathbb{Z}$  mempunyai unsur unitari?*
  - (iii) Apakah unit dalam  $\mathbb{Z}$ ?*
  - (iv) Adakah  $\mathbb{Z}$  suatu medan? Justifikasikan jawapan anda.*
- (b) Dapatkan unit bagi  $\mathbb{Z}_m$ , suatu gelanggang integer modulo  $m$ .*
- (c) Berikan semua pembahagi sifar dalam  $\mathbb{Z}_{12}$ .*
- (d) Biar  $M$  suatu set matriks  $2 \times 2$  dengan pemasukannya dalam suatu medan  $\mathbb{F}$ . Tunjukkan bahawa  $M$  adalah gelanggang bukan kalis tukar tertib dengan uniti.*

[30 markah]

6. (a) Discuss the relation between ring homomorphisms and group homomorphisms.
- (b) Consider the rings  $R = 2\mathbb{Z}$  and  $R' = 3\mathbb{Z}$ . Show that  $R$  is not isomorphic to  $R'$ .

[14 marks]

6. (a) *Bincangkan hubungan di antara homomorfisma gelanggang dan juga homomorfisma kumpulan.*
- (b) Pertimbangkan gelanggang  $R = 2\mathbb{Z}$  dan  $R' = 3\mathbb{Z}$ . Tunjukkan bahawa  $R$  tidak isomorfik dengan  $R'$ .*

[14 markah]