
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2011/2012 Academic Session

June 2012

MSG 228 – Introduction to Modelling
[Pengenalan Pemodelan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) (i) Explain briefly the Buckingham - π theorem
 (ii) The period T of a small oscillation in a pendulum is related to the length L , mass M and accelerations due to gravity g , by a functional relationship

$$f(T, M, L, g) = 0$$

By writing this in a dimensionless form, find an actual relationship.

[25 marks]

- (b) Coffee is a beverage taken daily by many people on this planet. The price of coffee depends on several factors. Draw a simple supply-demand diagram, together with a brief explanation for each of the following scenarios:
 - (i) A disease that kills much of the Brazilian crop (Brazil is a major supplier of coffee beans),
 - (ii) Coffee workers being given higher wages.

[25 marks]

- (c) A free falling uniform density spherical object reaches the terminal velocity. At this instance, the frictional force is balanced by the gravitational force. The frictional force is given by

$$F_d = kSv^2$$

where v is the velocity and S the cross-sectional area of the object. By defining a characteristic length, find the general form of the velocity.

[25 marks]

- (d) The motion of a damped linear spring is given by

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx$$

where k is the spring constant. Find the units for k .

[25 marks]

1. (a) (i) Terangkan secara ringkas teorem Buckingham- π .
 (ii) Kalaan ayunan kecil T satu bandul dengan panjang L , jisim M dan pecutan disebabkan graviti, g , mempunyai hubungan melalui fungsi

$$f(T, M, L, g) = 0$$

Dengan menulis ini dalam bentuk tanpa dimensi, cari satu hubungan sebenar.

[25 markah]

- (b) Kopi adalah satu minuman yang diambil setiap hari oleh ramai orang atas planet ini. Harga kopi bergantung kepada beberapa faktor. Lukiskan rajah permintaan pembekalan yang mudah, bersama-sama dengan penjelasan ringkas bagi setiap senario berikut.

- (i) Suatu penyakit yang telah memusnahkan banyak tanaman di Brazil (Brazil ialah pembekal utama biji kopi),
- (ii) Pekerja ladang kopi diberikan gaji yang lebih tinggi.

[25 markah]

- (c) Satu objek sfera dengan ketumpatan seragam jatuh secara bebas dan mencapai halaju terminal. Pada ketika ini, daya geseran diimbangi oleh daya graviti. Daya geseran diberikan oleh

$$F_d = kSv^2$$

dengan v halaju dan S luas keratan rentas objek. Dengan mentakrifkan panjang cirian, dapatkan bentuk am halaju.

[25 markah]

- (d) Gerakan satu spring linear terlembap diberi oleh

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx$$

dengan k pemalar spring. Cari unit bagi k .

[25 markah]

2. (a) A cake factory made cheese and chocolate cakes daily to be distributed to various supermarkets. Market survey indicates a demand of at least 100 chocolate cakes and 80 cheese cakes daily. Due to production limitation, no more than 200 chocolate cakes and 170 cheese cakes can be made daily. To fulfill the supply contract, a total of at least 200 cakes must be delivered daily.

If each chocolate cake sold results in a loss of RM2 while each cheese cake sold results in RM5 profit, how many of each type of cake must be made daily to maximize profits?

[40 marks]

- (b) Solve the following linear program using the simplex method.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad x + 2y - z \\ &\text{subject to :} \quad 2x + y + z \leq 14 \\ &\quad \quad \quad 2x + 5y + 5z \leq 30 \\ &\quad \quad \quad x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

[40 marks]

- (c) Suppose you are being asked to model the air flow around an F1 car. What parameters do you need to take into account and why?

[20 marks]

...4/-

2. (a) Sebuah kilang kek membuat kek keju dan kek coklat setiap hari untuk diagihkan kepada pelbagai pasar raya. Kajian pasaran menunjukkan terdapat permintaan untuk sekurang-kurangnya 100 kek coklat dan 80 kek keju setiap hari. Oleh sebab kilang mempunyai kapasiti pengeluaran terhad, tidak lebih daripada 200 kek coklat dan 170 kek keju boleh dihasilkan. Untuk memenuhi kontrak bekalan, sebanyak sekurang-kurangnya 200 kek mesti dihantar setiap hari.

Jika setiap kek coklat yang dijual mengakibatkan kerugian sebanyak RM2 manakala setiap kek keju menghasilkan keuntungan RM5, berapa banyakkah setiap jenis kek yang mesti dibuat setiap hari untuk memaksimumkan keuntungan?

[40 markah]

- (b) Selesaikan program linear berikut dengan menggunakan kaedah simpleks.

$$\begin{aligned} \text{Maksimumkan} \quad & x + 2y - z \\ \text{tertakluk kepada:} \quad & 2x + y + z \leq 14 \\ & 2x + 5y + 5z \leq 30 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

[40 markah]

- (c) Andaikan anda diminta untuk memodelkan aliran udara di sekeliling sebuah kereta F1. Apakah parameter-parameter yang anda perlu ambil kira dan mengapa?

[20 markah]

3. (a) Consider the following calibration data for the voltage flow meter from frictional losses experiment.

Voltage (x_i)	1.01	1.27	1.85	2.38	2.83	3.13	3.96	4.91
Flowrate (y_i)	0.00	0.19	0.58	0.96	1.26	1.47	2.07	2.75

Find the linear fit for this data.

[50 marks]

- (b) Given three points (1,1), (2,-2) and (3,1):
 (i) Find a unique polynomial that interpolates these points.
 (ii) Using the spline formula, find the linear splines that connect these points.

[30 marks]

- (c) Given a time series data, what sort of information would you be interested in looking?

[20 marks]

3. (a) *Pertimbangkan data penentuan satu eksperimen bagi meter aliran vorteks hasil kekurangan daripada geseran.*

<i>Voltan (x_i)</i>	1.01	1.27	1.85	2.38	2.83	3.13	3.96	4.91
<i>Kadar aliran (y_i)</i>	0.00	0.19	0.58	0.96	1.26	1.47	2.07	2.75

Cari penyesuaian linear untuk data ini.

[50 markah]

- (b) *Diberi tiga titik (1,1), (2, -2) dan (3,1):*
 (i) *Dapatkan polinomial unik yang menginterpolasikan titik-titik ini.*
 (ii) *Menggunakan formula splin, cari splin linear yang menyambung titik-titik ini.*

[30 markah]

- (c) *Diberi suatu data siri masa, apakah jenis maklumat yang anda harap dapat dicari?*

[20 markah]

4. (a) (i) Find the equilibrium point of the following price model $P_{n+1} = 39 - 1.25P_n$
 (ii) Determine its stability.
 (iii) Determine whether the price oscillates around the equilibrium point.
 (iv) Discuss the significance of your answers.

[40 marks]

- (b) Species A with population a_n and species B with population b_n are in an isolated environment. Species B consumes the same food as species A while species A has an alternative source of food. Build up a simple finite difference model for the population growth of both species.

[20 marks]

- (c) A simple model for an epidemic can be written as

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha IS, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha IS - \beta I, \quad \frac{dR}{dt} = \beta I$$

$$N = S + I + R$$

S is the number of susceptible, I the infectives, and R the recovered. N is the population and α , β suitable constants.

At the beginning, there is a single individual with an infectious disease. If this individual mixes freely with the others, what are the conditions that result in an epidemic?

[40 marks]

4. (a) (i) Cari titik keseimbangan model harga berikut $P_{n+1} = 39 - 1.25P_n$
 (ii) Tentukan kestabilan titik ini.
 (iii) Tentukan sama ada harga berayun di sekitar titik keseimbangan.
 (iv) Bincangkan kesignifikan jawapan-jawapan anda.

[40 markah]

- (b) Spesies A dengan populasi a_n dan spesies B dengan populasi b_n berada dalam persekitaran yang terpencil. Spesies B memakan makanan yang sama seperti spesies A manakala spesies A mempunyai sumber makanan alternatif. Bina satu model persamaan beza yang mudah untuk pertumbuhan populasi kedua-dua spesies.

[20 markah]

- (c) Satu model mudah untuk wabak boleh ditulis sebagai

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha IS, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha IS - \beta I, \quad \frac{dR}{dt} = \beta I$$

$$N = S + I + R$$

S ialah bilangan terdedah, I berpenyakit, dan R yang telah pulih. N adalah bilangan populasi dan α, β pemalar yang sesuai. Pada mulanya, terdapat seorang individu dengan penyakit berjangkit. Jika individu ini bercampur secara bebas dengan orang lain, apakah syarat-syarat yang boleh mengakibatkan wabak?

[40 markah]

5. (a) The logistic equation for population growth can be written as

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - bP^2$$

where $P(t)$ is the population at time t , a and b are suitable parameters.

- (i) Solve the equation.
 (ii) What is the limiting value of the population as $t \rightarrow \infty$?
 (iii) What happens if the parameters a and b are roughly of the same numerical value?

[35 marks]

- (b) The Lotka-Volterra system of equations describes the interactions between prey (x) and predator (y). It can be written as

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

where a is birth rate of prey, d death rate of predator, b and c are interaction parameters.

Find all the equilibrium points of the model and test for their stability.

[35 marks]

- (c) In a traffic flow along a four-way junction, let the basic unit of time be one complete cycle of the traffic light. Find an expression for the average delay-time (in cycles) for each car arriving at the intersection in a given time.

[30 marks]

5. (a) *persamaan logistik untuk pertumbuhan populasi boleh ditulis sebagai*

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - bP^2$$

dengan $P(t)$ adalah penduduk pada masa t , a dan b adalah parameter yang sesuai.

- (i) *Selesaikan persamaan.*
 (ii) *Apakah nilai had penduduk apabila $t \rightarrow \infty$?*
 (iii) *Apakah yang akan berlaku jika parameter a dan b mempunyai nilai angka yang hampir sama?*

[35 markah]

- (b) *Sistem persamaan Lotka-Volterra memperihalkan interaksi di antara mangsa (x) dan pemangsa (y). Ia boleh ditulis sebagai*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy\end{aligned}$$

dengan a sebagai kadar kelahiran mangsa, d kadar kematian pemangsa, b dan c adalah parameter –parameter interaksi.

Cari semua titik keseimbangan dan ujikan kestabilan titik-titik ini.

[35 markah]

- (c) *Dalam aliran trafik pada satu simpang empat, biarkan satu kitaran lengkap lampu isyarat sebagai unit asas masa. Dapatkan ungkapan bagi masa tunda purata (dalam kitaran) bagi setiap kereta yang tiba di persimpangan dalam masa yang diberikan.*

[30 markah]