UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2011/2012 Academic Session

June 2012

MSS 301 – Complex Analysis
[Analisis Kompleks]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of <u>FIVE</u> pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi <u>LIMA</u> muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

<u>Instructions</u>: Answer **<u>all eleven</u>** [11] questions.

*[**<u>Arahan:</u>** Jawab **<u>semua sebelas</u>** [11] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Define a complex number as well as the operations of addition and multiplication between two complex numbers.
   Show that every complex number z can be expressed in its Cartesian form $z = a + ib,$ where the unit imaginary number is i.
   Show that no order exists on the field of complex numbers that will make it an ordered field.

[20 marks]

1. Takrifkan nombor kompleks serta operasi hasil tambah dan hasil darab dua nombor kompleks.
Tunjukkan setiap nombor kompleks z dapat diungkapkan dalam bentuk Cartesan $z = a + ib,$ dengan i sebagai nombor unit khayalan.
Tunjukkan tidak wujud tertib pada medan nombor kompleks yang dapat menjadikan ia sebagai medan bertertib.

[20 markah]

2. For two complex numbers a and b, show that

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2 \ \ |a|^2 + |b|^2 \ \ .$$

Show that vectors z and w are perpendicular if and only if z/w is purely imaginary.

[20 marks]

2. Untuk dua nombor kompleks a dan b, tunjukkan

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2 \ \ |a|^2 + |b|^2 \ \ .$$

Tunjukkan vektor z dan w adalah serenjang jika dan hanya jika z/w *merupakan nombor khayalan.*

[20 markah]

3. If $f \ \ z \ = u \ \ x,y \ + iv \ \ x,y$ is analytic in a domain D, what can be said about the first partials of u and v? Write its derivative $f\,'$ in terms of u and v. Explain why $u\,,v$ and their higher-oder partials are harmonic in D.

[20 marks]

3. Jika $f \ \ z \ = u \ \ x,y \ + iv \ \ x,y$ analisis pada domain D, apakah yang dapat dinyatakan tentang terbitan separa peringkat pertama u dan v? Ungkapkan terbitan $f\,'$ dalam sebutan u dan v. Terangkan mengapa $u\,,v$ dan terbitan separa peringkat tinggi adalah harmonik pada D.

[20 markah]

4. If $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ is differentiable at $z = re^{i\theta}$, show that

$$\frac{\partial f}{\partial r} = e^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = re^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial y}\ ,$$

where $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$.

Define the principal logarithmic function $w = Log\ z$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Where is this function discontinuous? Find the largest domain so that $w = Log\ z$ is analytic there, and find its derivative.

[30 marks]

4. Andaikan $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ terbezakan pada $z = re^{i\theta}$. Tunjukkan

$$\frac{\partial f}{\partial r} = e^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = re^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial y}\ ,$$

dengan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$.

Takrifkan fungsi logaritma prinsipal $w = Log\ z$ pada $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Tentukan di mana fungsi tersebut tak selanjar. Dapatkan domain terbesar agar $w = Log\ z$ analisis di situ, dan dapatkan terbitan w.

[30 markah]

5. Let $f = u + iv$ be analytic in a domain D. If $F = F(u,v)$ has a non-vanishing first partial and satisfies $F(u,v) = 0$, show that f is a constant function in D.

If $f = u + iv$ is analytic in a domain D satisfying $au^n + bv^m =$ constant, where a and b are not both zero, deduce that f is a constant in D.

[20 marks]

5. Andaikan $f = u + iv$ analisis pada domain D. Jika $F = F(u,v)$ mempunyai terbitan separa pertama tak sifar dan $F(u,v) = 0$, tunjukkan f merupakan fungsi malar pada D.

Jika $f = u + iv$ analisis pada domain D dan memenuhi $au^n + bv^m =$ pemalar, dengan a dan b bukan kedua-duanya sifar, deduksikan bahawa f adalah malar pada D.

[20 markah]

6. Show that $w = \sin z$ is an unbounded entire function.

Find z satisfying $\sin z = -3$.

[20 marks]

6. Tunjukkan $w = \sin z$ merupakan fungsi seluruh yang tak terbatas.

Dapatkan z yang memenuhi $\sin z = -3$.

[20 markah]

7. Evaluate the following integrals over the given positively oriented simple closed contour:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{ze^{z}}{3z+1 \quad z+i}\,dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\cos z}{2z-3\pi \quad ^{4}}\,dz$

[20 marks]

7. Nilaikan kamiran berikut pada kontur tertutup ringkas berarah positif yang diberikan:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{ze^{z}}{3z+1 \quad z+i}\,dz$ *(b)* $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\cos z}{2z-3\pi \quad ^{4}}\,dz$

[20 markah]

8. Let p be a polynomial of positive degree n. It is known that there exists positive constants m and R so that $\left|p \quad z\right| \geq m$ for $|z| \geq R$. Use this fact to prove that the polynomial p has at least one complex zero.

[20 marks]

8. Andaikan p polinomial berdarjah positif n. Diketahui wujud pemalar positif m dan R agar $\left|p \quad z\right| \geq m$ untuk $|z| \geq R$. Gunakan kenyataan ini untuk membuktikan polinomial p mempunyai suatu pensifar kompleks.

[20 markah]

9. Show that the Riemann zeta function given by

$$\zeta \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z}}$$

is analytic in $\operatorname{Re} z > 1$. Show that the convergence is not uniform in $|z| < 1$.

[20 marks]

9. Tunjukkan fungsi Riemann zeta

$$\zeta \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z}}$$

adalah analisis pada $\operatorname{Re} z > 1$. *Tunjukkan penumpuan ini adalah tak seragam pada* $|z| < 1$.

[20 markah]

10. Find three Laurent series expansion for the function

$$f(z) = \frac{z^2+z-1}{(z-3)(z^2+2)}$$

in powers of z.

[20 marks]

10. Dapatkan tiga perkembangan siri Laurent bagi fungsi

$$f(z) = \frac{z^2+z-1}{(z-3)(z^2+2)}$$

dalam kuasa z.

[20 markah]

11. Evaluate the following integrals:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}\,d\theta, \quad 0<a<1.$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}\,dx$

[30 marks]

11. Nilaikan kamiran berikut:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}\,d\theta, \quad 0<a<1.$ *(b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}\,dx$

[30 markah]

- ooo O ooo -