
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2011/2012

Januari 2012

MAT 101 Calculus
[Kalkulus]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **SIX** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

*[Arahan: Jawab **semua lapan** [8] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

- 1 (a) Let $A = \mathbb{R}$ or $[-a, a]$. Give the definition of an even function $f : A \rightarrow B$. Also give the definition of an odd function $f : A \rightarrow B$.
- (b) Determine if each of the following functions is odd, even or neither, when f is even and g is odd.
- (i) $f \cdot g$;
 - (ii) $f \circ g$.

[12 marks]

- 1 (a) *Andaikan $A = \mathbb{R}$ atau $[-a, a]$. Beri takrif untuk fungsi genap $f : A \rightarrow B$. Juga berikan takrif untuk fungsi ganjil $f : A \rightarrow B$.*
- (b) *Tentukan sama setiap fungsi berikut ganjil, genap atau bukan kedua-duanya, jika f genap dan g ganjil.*
- (i) $f \cdot g$;*
 - (ii) $f \circ g$.*

[12 markah]

- 2 (a) Give the definition of a one to one function $f : A \rightarrow B$. Give two examples of one to one function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) A function $f : A \rightarrow B$ is onto if $f(A) = B$. A student shows that the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, is onto as follows:

Consider any b in $\mathbb{R}$. Then

$$\begin{aligned}f(a) &= b \\2a + 3 &= b \\a &= \frac{b - 3}{2}\end{aligned}$$

and

$$f(a) = 2 \left(\frac{b - 3}{2} \right) + 3 = b.$$

So f is onto.

Explain why this solution is sufficient to show that f is onto.

[7 marks]

2 (a) Beri takrif untuk fungsi satu ke satu $f : A \rightarrow B$. Beri dua contoh fungsi satu ke satu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) Fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah keseluruhan jika $f(A) = B$. Seorang pelajar menunjukkan bahawa fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, adalah keseluruhan seperti berikut:

Pertimbangkan sebarang b dalam $\mathbb{R}$. Maka

$$\begin{aligned} f(a) &= b \\ 2a + 3 &= b \\ a &= \frac{b-3}{2} \end{aligned}$$

dan

$$f(a) = 2 \left(\frac{b-3}{2} \right) + 3 = b.$$

Jadi f adalah keseluruhan.

Terangkan mengapa penyelesaian ini cukup untuk menunjukkan f keseluruhan.

[7 markah]

3 (a) Find the nonzero value for the constant k that makes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x}, & x < 0; \\ 3x + 2k^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

continuous at $x = 0$.

(b) If f and g are continuous on $[a, b]$, and $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$, show that there is at least one solution in (a, b) for the equation $f(x) = g(x)$.

[16 marks]

3 (a) Cari nilai tak sifar untuk pemalar k yang menjadikan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x}, & x < 0; \\ 3x + 2k^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

selanjar pada $x = 0$.

(b) Jika f dan g selanjar pada $[a, b]$ dan $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$, tunjukkan bahawa terdapat sekurang-kurangnya satu penyelesaian dalam (a, b) untuk persamaan $f(x) = g(x)$.

[16 markah]

4 (a) Differentiate the function, WITHOUT simplifying it:

- (i) $f(x) = e^{2x} \tan^{-1}(3x)$,
- (ii) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,
- (iii) $h(x) = \ln(\cos(\sin x))$.

(b) (i) If f and g are differentiable at $x = a$, give the formula of the derivative of $f + g$ at $x = a$.
 (ii) If $f + g$ is differentiable at $x = a$, are f and g necessarily differentiable at $x = a$? Prove it or give a counterexample to disprove it.

[13 marks]

4 (a) Bezakan fungsi berikut, TANPA meringkaskannya:

- (i) $f(x) = e^{2x} \tan^{-1}(3x)$,
- (ii) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,
- (iii) $h(x) = \ln(\cos(\sin x))$.

(b) (i) Jika f dan g terbezakan pada $x = a$, beri rumus untuk terbitan bagi $f + g$ pada $x = a$.
 (ii) Jika $f + g$ terbezakan pada $x = a$, adakah f dan g perlu terbezakan pada $x = a$? Buktikannya atau beri satu contoh lawan untuk menyangkalnya.

[13 markah]

5 (a) Suppose that f is twice differentiable on an interval (a, b) that contains c and f has an inflection point at c . By considering $g = f'$, prove that $f''(c) = 0$.

(b) Find all the asymptotes (vertical, horizontal, slant) of the graph of $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

[16 marks]

5 (a) Andaikan f terbezakan dua kali pada selang (a, b) yang mengandungi c dan f mempunyai titik lengkung balas pada c . Dengan mempertimbangkan $g = f'$, buktikan bahawa $f''(c) = 0$.

(b) Cari semua asimptot (mencancang, mengufuk, sendeng) untuk graf untuk $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

[16 markah]

6 (a) Find the following integrals/antiderivatives.

(i) $\int \cos^3 x \, dx,$

(ii) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \, dx,$

(iii) $\int \frac{\sqrt{x-4}}{x} \, dx.$

(b) Evaluate $\int_1^2 \frac{3 + \ln x}{4x} \, dx.$

[18 marks]

6 (a) Cari kamiran/antiterbitan berikut.

(i) $\int \cos^3 x \, dx,$

(ii) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \, dx,$

(iii) $\int \frac{\sqrt{x-4}}{x} \, dx.$

(b) Nilaiikan $\int_1^2 \frac{3 + \ln x}{4x} \, dx.$

[18 markah]

- 7 (a) Find a function g such that $\int_0^x tg(t) dt = x^2 \sin x - x^3$, for $x > 0$.
- (b) If f is continuous and $\int_0^3 f(x) dx = 6$, show that f takes on the value 2 at least once on the interval $[0, 3]$.

[8 marks]

- 7 (a) Cari fungsi g supaya $\int_0^x tg(t) dt = x^2 \sin x - x^3$, untuk $x > 0$.
- (b) Jika f selanjar dan $\int_0^3 f(x) dx = 6$, tunjukkan bahawa f mempunyai nilai 2 sekurang-kurangnya sekali pada selang $[0, 3]$.

[8 markah]

- 8 (a) Find the intersection point(s) of the curves $x = y(4 - y)$ and $x - 2y + 3 = 0$. Then sketch both curves on a same coordinate plane.
- (b) Setup, without evaluating, the integral for the volume of the solid generated by rotating about $y = -1$ the region bounded by $x = y(4 - y)$, $x - 2y + 3 = 0$ and $y = -1$.

[14 marks]

- 8 (a) Cari titik(-titik) persilangan untuk lengkung $x = y(4 - y)$ dan $x - 2y + 3 = 0$. Kemudian lakarkan kedua-dua lengkung pada satu satah koordinat yang sama.
- (b) Bentukkan, tanpa menilai, kamiran untuk isipadu bongkah yang terjana dengan memutar sekitar $y = -1$ rantau yang dibatasi oleh $x = y(4 - y)$, $x - 2y + 3 = 0$ dan $y = -1$.

[14 markah]