
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2011/2012 Academic Session

January 2012

MSG 327 – Mathematical Modelling
[Pemodelan Matematik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) From the exact solution, find the time required to empty the water in a cylindrical tank 6 feet in diameter and 10 feet long through a hole 4 inches in diameter if the tank is initially full and its axis is horizontal. Also, find the depth of the water in the tank after 10 minutes by using modified Euler's method. Develop an algorithm for applying Euler's method to find the water level in the tank at any time t .

[10 marks]

- (b) Tanks A and B have the same capacity of 1200 liter in volume. Initially Tank A contains 700 liters of water with 40 grams of salt dissolved in it and tank B contains 900 liters of water with 110 grams of salt dissolved in it. Salt water with a concentration of 2 gram/liter of salt enters tank A at a rate of 6 liters/hour. Fresh water enters tank B at a rate of 8 liters/hour. Through a connecting pipe water flows from tank B into tank A at a rate of 12 liters/hour. Through a different connecting pipe 18 liters/hour flows out of tank A and 12 liters/hour are drained out of the pipe (running out of the system completely) and only 4 liters/hour flows back into tank B. Set up the system that will give the amount of salt in each tank at any given time. Use Runge-Kutta method of order four for estimating the amount of salt in Tanks A and B at the end of 6th minute (Compute it in one steps with step size $h = 6$).

[15 marks]

1. (a) *Daripada penyelesaian tepat, cari masa yang diperlukan untuk mengosongkan air di dalam tangki silinder berdiameter 6 kaki dan panjang 10 kaki melalui lubang berdiameter 4 inci jika tangki itu pada awalnya penuh dan paksinya adalah mendatar. Juga, cari kedalaman air di dalam tangki selepas 10 minit dengan menggunakan kaedah Euler terubahsuai. Bangunkan algoritma dengan menggunakan kaedah Euler untuk mencari paras air dalam tangki pada sebarang masa t .*

[10 markah]

- (b) *Tangki A dan B mempunyai kapasiti isipadu yang sama iaitu 1200 liter. Pada mulanya tangki A mengandungi 700 liter air dengan 40 gram garam terlarut di dalamnya dan tangki B mengandungi 900 liter air dengan 110 gram garam terlarut di dalamnya. Air garam dengan kepekatan 2 gram garam / liter memasuki tangki A pada kadar 6 liter / jam. Air tawar memasuki tangki B pada kadar 8 liter / jam. Air mengalir dari tangki B ke dalam tangki A pada kadar 12 liter/jam melaui sambungan paip. Melalui paip yang berbeza , 18 liter / jam mengalir keluar daripada tangki A dan 12 liter / jam disalurkan keluar dari paip (mengalir keluar daripada sistem sepenuhnya) dan hanya 4 liter / jam mengalir balik ke dalam tangki B. Sediakan sistem yang akan memberikan jumlah garam dalam tangki masing-masing pada sebarang masa yang diberikan. Gunakan kaedah Runge-Kutta peringkat empat untuk menganggar jumlah garam dalam tangki A dan B pada akhir minit ke 6 (pengiraan dilakukan dalam satu langkah dengan saiz langkah $h = 6$).*

[15 markah]

2. (a) A horizontal beam of length $2l$, with a uniform load ' w ' per unit length is fixed horizontally at both ends. If there is in addition a concentrated vertical load W at the middle of the beam, find the maximum deflection from the exact solution. Also, derive the finite difference scheme for finding the deflection of the beam at any point.

[10 marks]

- (b) A ball of mass m is thrown vertically from the surface of earth with initial velocity v_0 . If the air resistance is k times the velocity, find
- (i) the velocity of the ball at any time during its motion.
 - (ii) the time at which the ball reaches the greatest height.
 - (iii) the greatest height attained by the ball.

[15 marks]

2. (a) Satu rasuk mendatar yang panjangnya $2l$, dengan ' w ' adalah beban seragam per unit panjang ditetapkan mendatar di kedua-dua hujungnya. Jika ditambah beban menegak terpumpun W di tengah rasuk, dapatkan pesongan maksimum daripada penyelesaian tepat. Juga, terbitkan skim beza terhingga untuk mendapatkan pesongan rasuk pada sebarang titik.

[10 markah]

- (b) Sebiji bola berjisim m dilontar menegak dari permukaan bumi dengan halaju awal v_0 . Jika rintangan udara adalah k kali halaju, cari
- (i) halaju bola pada sebarang masa ketika gerakannya.
 - (ii) masa yang bola mencapai ketinggian terbesar.
 - (iii) ketinggian terbesar yang dicapai oleh bola.

[15 markah]

3. (a) A uniform horizontal strut of length l , freely supported at both ends, carries a uniformly distributed load W per unit length. The thrust at each end is P . Formulate this physical problem as a mathematical model and obtain the exact solution to it. Hence, find the maximum deflection and the maximum bending moment of the strut from the exact solution of the governing differential equation. Also, obtain the finite difference scheme from the governing differential equation and boundary conditions for finding the deflection of the beam at any point.

[15 marks]

- (b) A 3 kg object is attached to a spring and will stretch the spring 392 mm by itself. There is no damping in the system and a forcing function of the form $F \sin \omega t$ is attached to the object and the system will experience resonance. The object is initially displaced 20 cm downward from its equilibrium position and given a velocity of 10 cm/sec upward. Formulate this as a mathematical model and hence, find the displacement of the spring at any time t .

[10 marks]

3. (a) Satu topang mendatar seragam dengan panjang l , disokong bebas pada kedua-dua hujung, membawa beban teragih seragam ' w ' per unit panjang. P adalah tujahan pada setiap hujung. Rumuskan masalah fizikal ini sebagai model matematik dan dapatkan penyelesaian tepatnya. Dengan itu, cari pesongan maksimum dan momen lentur maksimum topang daripada penyelesaian tepat persamaan pembezaan menakluk. Juga, dapatkan skim beza terhingga daripada persamaan pembezaan menakluk dan syarat-syarat sempadan untuk mencari pesongan rasuk pada sebarang titik.

[15 markah]

- (b) 3 kg objek disangkut pada pegas dan dengan sendirinya akan meregangkan pegas sebanyak 392 mm. Tiada redaman di dalam sistem dan fungsi memaksa dalam bentuk $F \sin \omega t$ dikenakan kepada objek dan sistem akan mengalami salunan. Objek itu pada mulanya teranjak 20 cm ke bawah dari kedudukan keseimbangannya dan diberi halaju 10 cm / saat ke atas. Rumuskan keadaan ini sebagai model matematik dan dengan itu, cari anjakan pegas pada sebarang masa t

[10 markah]

4. (a) A guitar string of length ' L ' is pulled upward at the middle to the height ' h ' and is released from rest from this position. Formulate this as a mathematical model leading to a initial boundary value problem and then use variable separable method and Fourier series method to solve this initial boundary value problem to obtain an expression for the position of the guitar string at any time t and at any point x .

[15 marks]

- (b) A metal bar of length 10 units is fully insulated along its sides. It is initially maintained at the temperature distribution given by $f(x) = 10x - x^2$ and for the subsequent time $t > 0$, the ends of the bar are maintained at zero temperature. Formulate this as a mathematical model leading to an initial boundary value problem. Using finite difference method, derive the Bendre - Schmidt iteration formula and then use it to obtain the numerical solution to the initial boundary value problem for 10 time steps (use the step sizes $\Delta x = 1$ and $\Delta t = 1$).

[10 marks]

4. (a) Tali gitar yang panjangnya ' L ' ditarik ke atas pada tengah ketinggian ' h ' dan dilepaskan dari pegun daripada kedudukan ini. Rumuskan keadaan ini sebagai model matematik yang membawa kepada masalah nilai sempadan awal dan kemudian gunakan kaedah pemisahan boleh ubah dan kaedah siri Fourier bagi menyelesaikan masalah nilai sempadan awal ini untuk mendapatkan ungkapan bagi kedudukan tali gitar pada sebarang masa t dan pada sebarang titik x .

[15 markah]

- (b) Bar logam yang panjangnya 10 unit tertebat sepenuhnya di sepanjang sisi-sisinya. Ia ditetapkan pada mulanya dengan pada taburan suhu yang diberikan oleh $f(x) = 10x - x^2$ dan untuk masa yang berikutnya $t > 0$, hujung bar ditetapkan pada suhu sifar. Rumuskan keadaan ini sebagai model matematik yang membawa kepada masalah nilai sempadan awal. Dengan menggunakan kaedah beza terhingga, terbitkan rumus lelaran Bendre - Schmidt dan seterusnya gunakannya untuk mendapatkan penyelesaian berangka kepada masalah nilai sempadan awal bagi 10 langkah masa (guna saiz langkah $\Delta x = 1$ dan $\Delta t = 1$).

[10 markah]

5. The faces of a thin square plate of length 4 cm (with unit thickness) are insulated so that no heat flows in the direction of thickness. The top edge of the plate is maintained at the temperature distribution given by $f(x) = 4x - x^2$, while the other three edges are maintained at zero temperature. Heat flows into the plate through the top edge and out of the plate through the other three edges. There is no internal energy generation within the plate. Formulate this as a mathematical model which leads to a boundary value problem and then use the method of separation of variables and Fourier series method to obtain the exact solution to it.

Using finite difference method, derive the standard five point formula and then obtain the numerical solution (correct to three decimal places) to the boundary value problem using Liebmann's iterative method (use the step sizes $\Delta x = 1$ and $\Delta y = 1$).

[25 marks]

5. Kedua-dua muka plat segiempat sama nipis yang panjangnya 4 cm (dengan ketebalan unit) tertebat supaya haba tidak mengalir dalam arah ketebalan. Satu sisi atas plat ditetapkan pada taburan suhu yang diberikan oleh $f(x) = 4x - x^2$, manakala tiga sisi yang lain ditetapkan pada suhu sifar. Haba mengalir ke dalam plat melalui sisi atas dan mengalir keluar daripada plat melalui tiga sisi yang lain. Tiada penjanaan tenaga dalaman di dalam plat. Rumuskan keadaan ini sebagai model matematik yang membawa kepada masalah nilai sempadan dan kemudian gunakan kaedah pemisahan pemboleh ubah dan kaedah siri Fourier untuk mendapatkan penyelesaian tepat baginya.

Dengan menggunakan kaedah beza terhingga, terbitkan rumus titik lima piawai dan seterusnya dapatkan penyelesaian berangka (tepat kepada tiga tempat perpuluhan) kepada masalah nilai sempadan dengan menggunakan Kaedah Lelaran Liebmann (guna saiz langkah $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$).

[25 markah]