UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2011/2012 Academic Session

January 2012

MSS 302 – Real Analysis
[Analisis Nyata]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua enam** [6] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. True/False question:
   (a) Every Borel set is a Lebesgue measurable set.
   (b) Every continuous function on a,b is Lebesgue integrable.
   (c) There exists a Riemann integrable function on a,b which is not Lebesgue integrable.
   (d) If $f \in L \; a,b$ then $f \in L^2 \; a,b$.
   (e) If $f \in L^2 \; a,b$ then $f \in L \; a,b$.
   (f) Let f_n be a sequence of Riemann integrable functions converges pointwisely to a function *f* on a,b . If there is $M \in \square$ such that $\left| f_n \; x \right| \le M$ for all *x* and *n*, then $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.
   (g) Let f_n be a sequence of Lebesgue integrable converges pointwisely to a function *f* on a,b . If there is $M \in \square$ such that $\left| f_n \; x \right| \le M$ for all *x* and *n*, then $\int_{a,b} f = \lim_{n\to\infty} \int_{a,b} f_n$.
   (h) There exists a continuous function on a,b where $f \notin L^2 \; a,b$.
   (i) The Fourier series of a continuous function $f \in L^2 \; -\pi,\pi$ always converges uniformly to *f*.

[20 marks]

1. Soalan Benar/salah:
   (a) Setiap set borel adalah set Lebesgue yang tersukat.
   (b) Setiap fungsi terselanjar di a,b adalah fungsi Lebesgue yang terkamir.
   (c) Terdapat sebuah fungsi terkamir Riemann di a,b yang mana tidak terkamir secara Lebesgue.
   (d) jika $f \in L \; a,b$ maka $f \in L^2 \; a,b$.
   (e) jika $f \in L^2 \; a,b$ maka $f \in L \; a,b$.
   (f) Misalkan f_n adalah sebuah jujukan fungsi terkamir Riemann yang menumpu secara titik demi titik kepada fungsi f di a,b , terdapat $M \in \square$ sehingga $\left| f_n \; x \right| \le M$ maka $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.
   (g) Misalkan f_n adalah sebuah jujukan fungsi terkamir Lebesgue yang menumpu secara titik demi titik kepada fungsi f di a,b . Jika terdapat $M \in \square$ sedemikian sehingga $\left| f_n \; x \right| \le M$ maka $\int_{a,b} f = \lim_{n\to\infty} \int_{a,b} f_n$.
   (h) Terdapat sebuah fungsi selanjar f di a,b yang mana $f \notin L^2 \; a,b$.
   (i) Siri Fourier dari fungsi selanjar $f \in L^2 \; -\pi,\pi$ selalu menumpu secara seragam kepada f .

[20 markah]

2. (a) State the definition of Lebesgue measurable set A. And the definition of a measurable function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

   (b) Suppose $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is a function. Prove that f is measurable if and only if for every $\alpha\in\mathbb{R}$, the set $\{x\in[a,b]:f(x)>\alpha\}$ is measurable.

[8 marks]

2. (a) Tuliskan takrif set tersukat Lebesgue A, dan takrif fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ yang tersukat.

(b) Diberikan $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Buktikan bahawa f tersukat jika dan hanya jika untuk setiap $\alpha\in\mathbb{R}$, set $\{x\in[a,b]:f(x)>\alpha\}$ tersukat.

[8 markah]

3. (a) State the definition of Lebesgue integral of a measurable function *f* on a bounded measurable set *A*? What does it mean to say a measurable function *f* on *A* is Lebesgue integrable?

   (b) Given an example of a Lebesgue integrable function on a bounded measurable set *A*, and an example of a function that is not Lebesgue integrable on a set *A*. Prove your answer.

[8 marks]

3. (a) Tuliskan makna dari kamiran Lebesgue dari sebuah fungsi tersukat f di domain tersukan A tersukat. Tuliskan apa yang dimaksudkan dengan sebuah fungsi terkamir secara Lebesgue.

(b) Berikan contoh sebuah fungsi terkamir secara Lebesgue dengan domain tersebut A yang terbatas dan berikan contoh sebuah fungsi tidak terkamir secara Lebesgue dengan domain tersukat A yang terbatas

[8 markah]

4. (a) State the Lebesgue monotone convergence theorem and the dominated convergence theorem.

   (b) Consider a sequence of functions $\{f_n\}$ on $[0,1]$ defined by

$$f_n(x)=\begin{cases} n & \text{for } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Investigate whether the two theorems are applicable for the sequence $\{f_n\}$. Whatever your answer (applicable/not applicable), check the conclusions of the theorems for the sequence $\{f_n\}$.

(c) Show by examples that the two theorems are not true for Riemann integral.

[24 marks]

4. *(a) Tuliskan teorem menumpu Monoton Lebesgue, dan teorem menumpu yang terdominasi Lebesgue.*

(b) Berikan jujukan fungsi $\{f_n\}$ di $[0,1]$ sebagai berikut

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{for } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Selidiki apakah ke dua teorem dapat diaplikasikan kepada $\{f_n\}$. Apapun jawapan anda, jelaskan kesimpulan dari kedua teorem $\{f_n\}$.

(c) Tunjukkan dengan contoh-contoh bahawa kedua teorem tersebut tak benar dalam kamiran Riemann.

[24 markah]

5. (a) Let $A \subset [a,b]$ and $t \in \mathbb{R}$. Prove that if A is a measurable set then so is the set $A - t := \{a - t \in [a,b] : a \in A\}$.

(b) Suppose $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is measurable, and for $t \in \mathbb{R}$ let the function $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ be defined by $g(x) = f(x+t)$. Show that g is a measurable function

(c) Prove that $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g.$

[20 marks]

5. *(a) Diberikan $A \subset [a,b]$ dan $t \in \mathbb{R}$. Buktikan bahawa jika A tersukat, maka set $A - t := \{a - t \in [a,b] : a \in A\}$ tersukat juga*

(b) Misalkan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tersukat dan bagi $t \in \mathbb{R}$ biarkan fungsi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tertakrif sebagai berikut $g(x) = f(x+t)$. Tunjukkan bahawa g fungsi tersukat.

(c) Buktikan $\int_{a,b} f = \int_{a,b} g$.

[20 markah]

6. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be the function of period 2π such that $f(x) = x^3$ for $-\pi \le x < \pi$.

(a) Prove that the Fourier series for f has the form $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, and then write an integral formula for b_n (do not evaluate it)

(b) Show the Fourier series in (a) does not converge pointwisely to *f* on $(-\pi,\pi)$, but it converges to *f* in $L^2(-\pi,\pi)$.

(c) Show that $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\, dx\right) = 0$.

(d) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{7}$.

[20 marks]

6. *Biarkan* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sebuah fungsi berperioda* 2π *sedemikian bahagian* $f(x) = x^3$ *bagi* $-\pi \le x < \pi$.

(a) Buktikan bahawa siri Fourien F mempunyai formula $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, *kemudian tuliskan formula kamiran untuk* b_n *(tidak perlu d evaluasi)*

(b) Tunjukkan bahawa siri fourien (a) tak menumpu secara titik demi titik ke f di $(-\pi,\pi)$, *tetapi ia menumpu kepada f di* $L^2(-\pi,\pi)$.

(c) Tunjukkan bahawa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\, dx\right) = 0$.

(d) Tunjukkan bahawa siri $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{7}$.

[20 markah]

- ooo O ooo -