
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2011/2012

Ogos 2012

MAA 101 – Calculus for Science Students I
[Kalkulus untuk Pelajar Sains I]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all nine** [9] questions.

[Arahan : Jawab **semua sembilan** [9] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Given a function $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, $x \geq 0$.

- (a) Determine whether f is one to one function. If yes, find its inverse.
 (b) Show that $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$.

[9 marks]

1. Diberi suatu fungsi $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, $x \geq 0$.

- (a) Tentukan samaada f ialah suatu fungsi satu ke satu. Jika ya, dapatkan songsangannya.
 (b) Tunjukkan bahawa $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$.

[9 markah]

2. Evaluate the following limit. The L'Hospital's rule can be applied whenever applicable.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

[12 marks]

2. Nilaiikan had berikut. Hukum L'Hospital's boleh digunakan di tempat yang sesuai.

- (a) $\text{had}_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$
 (b) $\text{had}_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

[12 markah]

3. (a) Given $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ kx + 3, & x \geq 1 \end{cases}$

Determine the value of k so that f is continuous at $x = 1$.

(b) Show that the equation $\sin x = x^2 - 3x + 1$ has a root on the interval $[2, 3]$.

[8 marks]

3. (a) Diberi $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ kx + 3, & x \geq 1 \end{cases}$

Tentukan nilai k supaya f selanjar pada $x = 1$.

(b) Tunjukkan bahawa persamaan $\sin x = x^2 - 3x + 1$ mempunyai satu punca pada selang $[2, 3]$.

[8 markah]

4. Find $\frac{dy}{dx}$ of the following.

(a) $y = \frac{x - \cos x}{x^2}$

(b) $xy + \ln x^2 = 3x$

(c) $y = \frac{e^{2x^4} (x-7)^5}{\sqrt[3]{(x^3+1)}}$. Use logarithmic differentiation.

[13 marks]

4. Cari $\frac{dy}{dx}$ berikut.

(a) $y = \frac{x - \cos x}{x^2}$

(b) $xy + \ln x^2 = 3x$

(c) $y = \frac{e^{2x^4} (x-7)^5}{\sqrt[3]{(x^3+1)}}$. Gunakan pembezaan logaritma.

[13 markah]

5. Given the properties of the graph $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(0) = 6, \quad f'(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty \text{ and } \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \infty \\ f'(x) < 0 \text{ on } (2, 6) \text{ and } (6, \infty) \quad f'(x) > 0 \text{ on } (-\infty, 2) \\ f''(x) < 0 \text{ on } (-4, 2) \quad f''(x) > 0 \text{ on } (-\infty, -4) \text{ and } (6, \infty) \end{aligned}$$

- State the critical number and all asymptotes.
- Show in table form, the interval of f increasing or decreasing and state the local extremum numbers, if any.
- Show in table form, the interval of concavity of f and state the number of inflection point, if any.
- Hence sketch the graph of f .

[11 marks]

5. Diberi sifat-sifat suatu graf $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(0) = 6, \quad f'(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty \text{ dan } \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \infty \\ f'(x) < 0 \text{ pada } (2, 6) \text{ dan } (6, \infty) \quad f'(x) > 0 \text{ pada } (-\infty, 2) \\ f''(x) < 0 \text{ pada } (-4, 2) \quad f''(x) > 0 \text{ pada } (-\infty, -4) \text{ dan } (6, \infty) \end{aligned}$$

- Nyatakan nombor kritikal dan semua asimptot.
- Tunjukkan dalam jadual, selang f menokok dan menyusut, dan nyatakan nombor ekstremum tempatan, jika ada.
- Tunjukkan dalam jadual, selang kecekungan f dan nyatakan nombor bagi titik lengkok balas, jika ada.
- Seterusnya lakarkan graf f .

[11 markah]

- A cylindrical swimming pool with radius r and height h is being filled from a water hose at a rate of 3 cubic meter per minute. Given that the volume of the cylinder, $V = \pi r^2 h$. If the pool is 28 meter across, how fast is the water level increasing when the pool is half full?
 - Find the points on the ellipse $4x^2 + y^2 = 4$ that are farthest away from the point $(1, 0)$

[11 marks]

- Sebuah kolam mandi berbentuk selinder dengan jejari r dan tinggi h diisi air dari suatu hos air pada kadar 3 meter padu seminit. Diberi bahawa isipadu selinder ialah $V = \pi r^2 h$. Jika kolam ini 28 meter melintang, berapakah kadar paras air meningkat apabila kolam separuh penuh.
 - Dapatkan titik-titik pada elip $4x^2 + y^2 = 4$ yang terjauh dari titik $(1, 0)$

[11 markah]

7. (a) Find the equation of a tangent line to the curve $y = F(x)$ at the point $(1,0)$ if

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{2t-1}{t+2} dt.$$

- (b) Compute the Riemann sum, S_n for $f(x) = 1 - x^2$ on interval $[0,1]$ by dividing the interval into n equal subintervals, Δx . Use the right endpoint in the k th subinterval as the sample point. Hence calculate the area under the curve over the given interval.

[Hint: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$].

[14 marks]

7. (a) Dapatkan persamaan garis tangen kepada $y = F(x)$ pada titik $(1,0)$ jika

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{2t-1}{t+2} dt.$$

- (b) Hitung hasil tambah Riemann, S_n untuk $f(x) = 1 - x^2$ pada selang $[0,1]$ secara membahagikan selang ini kepada n subselang Δx yang sama. Guna titik hujung kanan dalam subselang ke- k sebagai titik sampel. Seterusnya kirakan luas di bawah lengkung pada selang yang diberikan.

[Petunjuk: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$].

[14 markah]

8. Evaluate the following integral.

(a) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx$

(b) $\int x e^{3x} dx$

[12 marks]

8. Nilai kamiran berikut.

(a) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx$

(b) $\int x e^{3x} dx$

[12 markah]

9. Sketch the region **R** in the first quadrant bounded by the given curves. Set up the integral that represents the volume of the solid obtained by rotating the region **R** about the specified line.

(a) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{2}x + 2$ and y -axis; about the y -axis.

(b) $y = -2x + 3$, $y = \sqrt{x}$ and x -axis; about the line $x = 2$.

[10 marks]

9. *Lakarkan kawasan **R** dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh lengkung-lengkung yang diberi. Nyatakan kamiran yang mewakili isipadu bongkah yang diperolehi apabila kawasan **R** dikisarkan pada garis yang ditentukan.*

(a) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{2}x + 2$ dan y -axis; pada garis y -axis.

(b) $y = -2x + 3$, $y = \sqrt{x}$ dan x -axis; pada garis $x = 2$.

[10 markah]