UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2011/2012

Ogos 2012

MAT 101 Calculus
[Kalkulus]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

*[Arahan: Jawab **semua lapan** [8] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1 (a) Find the following limit, if it exists.
(i) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$;
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)^3-8}{x}$;
(iii) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{x}$.

(b) If $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a}$ exists, show that $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

[10 marks]

1 (a) Cari setiap had berikut, jika wujud.
(i) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$;
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{(2-x)^3-8}{x}$;
(iii) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+9x^2}-1}{x}$.

(b) Jika $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a}$ *wujud, tunjukkan bahawa* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

[10 markah]

2 (a) Give the $\epsilon - \delta$ definition of a function $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ to be continuous at $a \in A$.

(b) By using the Intermediate Value Theorem, show that the equation $1+2x+x^3+4x^5 = 0$ has one real root on $[-1, 0]$.

(c) Show that the equation $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ has exactly one real root.

[18 marks]

2 (a) Beri takrif $\epsilon - \delta$ *untuk fungsi* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ *selanjar pada* $a \in A$.

(b) Dengan menggunakan Teorem Nilai Pertengahan, tunjukkan bahawa persamaan $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ *mempunyai satu punca nyata pada* $[-1, 0]$.

(c) Tunjukkan bahawa persamaan $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ *mempunyai hanya satu punca nyata.*

[18 markah]

3 (a) Give the definition (in term of limit) of the derivative of a function $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ at $a \in A$.

(b) Prove that if f has a derivative at a, then f is continuous at a.

(c) Give an example of a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is continuous at 0 but has no derivative at 0.

[10 marks]

3 (a) Beri takrif (dalam bentuk had) untuk terbitan bagi fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ *pada* $a \in A$.

(b) Buktikan bahawa jika f *mempunyai terbitan pada* a, *maka* f *selanjar pada* a.

(c) Beri satu contoh fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *yang selanjar pada* 0 *tetapi tidak mempunyai terbitan pada* 0.

[10 markah]

4 (a) Use implicit differentiation to find dy/dx for the *Folium of Descartes* $x^3 + y^3 = 3xy$.

(b) Find an equation for the tangent line to the *Folium of Descartes* at the point $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

[8 marks]

4 (a) Guna pembezaan tersirat untuk mencari dy/dx *untuk "Folium of Descartes"* $x^3 + y^3 = 3xy$.

(b) Cari persamaan garis tangen untuk "Folium of Descartes" pada titik $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

[8 markah]

5 (a) Find the dimension of a rectangle with perimeter $100m$ whose area is as large as possible.

(b) (i) A point c is called a *stationary point* of a function f if $f'(c) = 0$. Find the stationary point of $f(x) = (x-1)^4$.
(ii) Show that $f''(c) = 0$, where c is the stationary point obtained in part (a), but f has no inflection at c.
(iii) By using the First Derivative Test, discuss the nature of the stationary point in part (a).

[22 marks]

5 (a) Cari dimensi untuk segiempat tepat dengan perimeter $100m$ dan luas adalah sebesar mungkin.

(b) (i) Titik c disebut titik pegun untuk fungsi f jika $f'(c) = 0$. Cari titik pegun untuk $f(x) = (x-1)^4$.
(ii) Tunjukkan bahawa $f''(c) = 0$, dengan c ialah titik pegun yang diperoleh di bahagian (a), tetapi f tidak mempunyai titik lengkok balas pada c.
(iii) Dengan menggunakan Ujian Terbitan Pertama, bincang sifat titik pegun di bahagian (a).

[22 markah]

6 (a) Find the supremum and the infimum, if exist, for the following sets:
(i) $A = [5,7) \bigcup (3, \sqrt{42}]$;
(ii) $B = \left\{x : x = \frac{1}{4} - \frac{1}{n},\, n = 1, 2, \ldots\right\}$.

(b) Find the upper sum $U(P, f)$ of $f(x) = 4 - x^2$ with respect to the partition $P = \{-2, \frac{1}{2}, 1, 2\}$.

[12 marks]

6 (a) Cari supremum dan infimum, jika wujud, untuk set berikut:
(i) $A = [5,7) \bigcup (3, \sqrt{42}]$;
(ii) $B = \left\{x : x = \frac{1}{4} - \frac{1}{n},\, n = 1, 2, \ldots\right\}$.

(b) Cari hasiltambah atas $U(P, f)$ untuk $f(x) = 4 - x^2$ merujuk kepada petak $P = \{-2, \frac{1}{2}, 1, 2\}$.

[12 markah]

7 In the theory of Riemann integration, it is a fact that if a function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfies $m \le f(x) \le M$ for all $x \in [a,b]$, then

$$m(b-a) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a),$$

where $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ denote the upper integral of f.

(a) If f is integrable on $[a,b]$ and $f(x) \ge 0$ for $x \in [a,b]$, show that $\int_a^b f \ge 0$.

(b) If $\int_a^b f = 0$, is it true that $f(x) = 0$ for all $x \in [a,b]$? Prove it if it is true or otherwise give a counterexample.

(c) If f, g are integrable on $[a,b]$ and $f(x), g(x) \ge 0$ for $x \in [a,b]$, show that $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.

[12 marks]

7 *Dalam teori kamiran Riemann, satu kenyataan adalah jika fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mematuhi $m \le f(x) \le M$ untuk semua $x \in [a,b]$, maka*

$$m(b-a) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a),$$

dengan $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ menandai kamiran atas untuk f.

(a) Jika f terkamirkan pada $[a,b]$ dan $f(x) \ge 0$ untuk $x \in [a,b]$, tunjukkan bahawa $\int_a^b f \ge 0$.

(b) Jika $\int_a^b f = 0$, adakah benar bahawa $f(x) = 0$ untuk semua $x \in [a,b]$? Buktikan jika benar atau berikan satu contoh lawan jika sebaliknya.

(c) Jika f, g terkamirkan pada $[a,b]$ dan $f(x), g(x) \ge 0$ untuk $x \in [a,b]$, tunjukkan bahawa $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.

[12 markah]

8 Define $F(x)$ by

$$F(x) = \int_{1}^{x^2} (3t^2 - 3)\, dt.$$

(a) Use the Fundamental Theorem of Calculus to find $F'(x)$.

(b) Check the result in part (a) by first integrating and then differentiating.

[10 marks]

8 *Takrifkan* $F(x)$ *dengan*

$$F(x) = \int_{1}^{x^2} (3t^2 - 3)\, dt.$$

(a) *Guna Teorem Asasi Kalkulus untuk mencari* $F'(x)$.

(b) *Semak keputusan di bahagian (a) dengan kamiran dan kemudian pembezaan.*

[10 markah]

- ooo O ooo -