
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2011/2012

Ogos 2012

MAT 202 - Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

[Arahan: Jawab **semua enam** [6] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

- 1 (a) Give the statement of the Completeness Axiom for $\mathbb{R}$.
- (b) Give the statement of the Density Theorem for rational number.
- (c) Show that the nonempty set $S = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p < \sqrt{2}\}$ does not have a supremum in $\mathbb{Q}$.

[13 marks]

- 1 (a) *Beri pernyataan Aksiom Kelengkapan untuk $\mathbb{R}$.*
- (b) *Beri pernyataan Teorem Ketumpatan untuk nombor nisbah.*
- (c) *Tunjukkan bahawa set tak kosong $S = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p < \sqrt{2}\}$ tidak mempunyai supremum pada $\mathbb{Q}$.*

[13 markah]

- 2 (a) If a is a nonzero rational number and b is an irrational number, show that ab is an irrational number.
- (b) Given $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with $f(x) = x^2 + 1$ and

$$g(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq 3; \\ x + 1, & x < 3, \end{cases}$$

find

- (i) $f(\{-1, 0, 1\})$;
 (ii) $f^{-1}((-5, 10))$;
 (iii) $f \circ g$.

[13 marks]

2 (a) Jika a nombor nisbah tak sifar dan b nombor tak nisbah, tunjukkan bahawa ab nombor tak nisbah.

(b) Diberi $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$ dan

$$g(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq 3; \\ x + 1, & x < 3, \end{cases}$$

cari

(i) $f(\{-1, 0, 1\})$;

(ii) $f^{-1}((-5, 10))$;

(iii) $f \circ g$.

[13 markah]

3 (a) If $\{a_n\}$ is a bounded sequence and $\{b_n\}$ a nonzero convergent sequence, does the sequence $\{a_nb_n\}$ converge? Prove it if it is convergent and find its limit. If not, give a counterexample.

(b) (i) Give the $\epsilon - \delta$ definition of a Cauchy sequence.

(ii) Show that a convergent sequence is a Cauchy sequence.

(iii) Give an example of a bounded sequence that is not a Cauchy sequence.

[20 marks]

3 (a) Jika $\{a_n\}$ jujukan terbatas dan $\{b_n\}$ jujukan menumpu tak sifar, adakah jujukan $\{a_nb_n\}$ menumpu? Buktikan jika ia menumpu dan cari hadnya. Jika tidak, beri satu contoh lawan.

(b) (i) Beri takrif $\epsilon - \delta$ untuk jujukan Cauchy.

(ii) Tunjukkan bahawa jujukan menumpu adalah jujukan Cauchy.

(iii) Beri satu contoh jujukan yang menumpu tapi bukan jujukan Cauchy.

[20 markah]

- 4 (a) (i) Give the statement of the Bolzano-Weierstrass Theorem for limit point.
(ii) Give an example of an infinite unbounded subset of $\mathbb{R}$ that has no limit point.
- (b) Let A be a subset of $\mathbb{R}$. Show that if x is a limit point of A , then there exists a sequence $\{x_n\}$ in A , with $x_n \neq x$ for all $n \in \mathbb{N}$, such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

[18 marks]

- 4 (a) (i) Beri pernyataan untuk Teorem Bolzano-Weierstrass bagi titik had.
(ii) Beri satu contoh subset yang tak terhingga dan tak terbatas untuk $\mathbb{R}$ yang tidak mempunyai titik had.
- (b) Biar A subset untuk $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahawa jika x titik had untuk A , maka wujud jujukan $\{x_n\}$ dalam A , dengan $x_n \neq x$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, sedemikian $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

[18 markah]

- 5 (a) (i) Give the statement of the Intermediate Value Theorem for a function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
(ii) If $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is continuous, prove that there exists c in $[0, 1]$ such that $f(c) = c$.
- (b) If the function f is continuous at 0, show that $g(x) = xf(x)$ is differentiable at 0, and find the value of $g'(0)$, where g' is the derivative of g .

[20 marks]

- 5 (a) (i) Beri pernyataan Teorem Nilai Pertengahan untuk fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
(ii) Jika $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ selanjar, buktikan bahawa wujud c pada $[0, 1]$ sedemikian $f(c) = c$.
- (b) Jika fungsi f selanjar pada 0, tunjukkan bahawa $g(x) = xf(x)$ terbezakan pada 0, dan cari nilai $g'(0)$, dengan g' ialah terbitan untuk g .

[20 markah]

6 (a) Prove that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{e^n}$ converges uniformly on $\mathbb{R}$.

(b) Show that

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{e^n} \right) dx = \frac{2e}{e^2 - 1}.$$

[16 marks]

6 (a) Buktikan bahawa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{e^n}$ menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(b) Tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{e^n} \right) dx = \frac{2e}{e^2 - 1}.$$

[16 markah]