
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2011/2012

Ogos 2012

MSS 318 - Discrete Mathematics
[Matematik Diskrit]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

*[Arahan: Jawab **semua lapan** [8] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

(1) Let n and r be non-negative integers with $n \geq r$.

(a) Prove that

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}.$$

(b) Prove that

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}.$$

[8 marks]

(1) *Biar n dan r adalah integer tak negatif dengan $n \geq r$.*

(a) *Buktikan bahawa*

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}.$$

(b) *Buktikan bahawa*

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1} \binom{n}{r}.$$

[8 markah]

(2) How many permutations of the letters $ABCDEFGH$ contain

- (a) the string BCD ?
- (b) the string $CFGA$?
- (c) the strings BA and GF ?
- (d) the strings ABC and DE ?
- (e) the strings ABC and CDE ?
- (f) the strings CBA and BED ?

[12 marks]

(2) *Berapa banyakkah pilihatur bagi huruf-huruf $ABCDEFGH$ yang mengandungi*

- (a) *rentetan BCD ?*
- (b) *rentetan $CFGA$?*
- (c) *rentetan BA dan GF ?*
- (d) *rentetan ABC dan DE ?*
- (e) *rentetan ABC dan CDE ?*
- (f) *rentetan CBA dan BED ?*

[12 markah]
...3/-

(3) For the graphs mentioned in the following statements, give an example or prove that there is no such graph:

- (a) A simple graph with 6 vertices and 15 edges.
- (b) A simple graph with 5 vertices, whose degrees are 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- (c) A graph with 6 vertices that has no Euler circuit but a Hamiltonian circuit.
- (d) A simple directed graph with in-degrees 0, 1, 2, 3, 3, 4 and out-degrees 1, 1, 2, 2, 3, 3.

[12 marks]

(3) Bagi graf yang dinyatakan dalam pernyataan berikut, beri satu contoh atau buktikan tidak terdapat graf sedemikian:

- (a) Suatu graf ringkas dengan 6 bucu dan 15 sisi.
- (b) Suatu graf ringkas dengan 5 bucu yang mana darjahnya adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- (c) Suatu graf dengan 6 bucu yang tiada litar Euler tetapi mempunyai litar Hamiltonian.
- (d) Suatu graf berarah dengan darjah masuk 0, 1, 2, 3, 3, 4 dan darjah keluar 1, 1, 2, 2, 3, 3.

[12 markah]

(4) Determine the number of solutions for each of the following.

- (a) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$
- (b) $x_1 + x_2 = 10, \quad 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 5.$
- (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 10, \quad x_1 \geq 5.$

[12 marks]

(4) Tentukan bilangan penyelesaian bagi setiap yang berikut.

- (a) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$
- (b) $x_1 + x_2 = 10, \quad 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 5.$
- (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 10, \quad x_1 \geq 5.$

[12 markah]

- (5) A straight line splits a plane into 2 regions. Let R_n be the maximum number of regions split by n straight lines.
- (a) What are R_1, R_2, R_3 and R_4 ?
 - (b) Give a recurrence relation for R_n .
 - (c) Find the closed form for R_n .

[14 marks]

- (5) *Satu garis lurus membahagi satu satah menjadi 2 bahagian. Biar R_n mewakili bilangan maksimum bahagian yang diperolehi apabila satu satah terbahagi oleh n garis lurus.*

- (a) Apakah R_1, R_2, R_3 dan R_4 ?*
- (b) Berikan hubungan jadi semula bagi R_n .*
- (c) Dapatkan bentuk tertutup bagi R_n .*

[14 markah]

- (6) You have won a price! Now, you have 2 options. The first option is to get $RM1$ million in each of the following 100 days. The second option is to get $RM1$ in the first day. Then 20% more than the previous day in each of the following 99 days. That means you will get $RM1.20$ for the second day, $RM1.44$ for the third day, and so on. Which one would you prefer? Justify your answer.

[14 marks]

- (6) *Anda telah memenangi suatu hadiah! Sekarang, anda mempunyai 2 pilihan. Pilihan pertama adalah anda mendapat $RM1$ juta sehari bagi 100 hari. Pilihan kedua adalah anda mendapat $RM1$ untuk hari pertama. Kemudian, tambahan 20% lebih daripada hari yang sebelumnya selama 99 hari. Ini bermaksud anda akan mendapat $RM1.20$ untuk hari kedua, $RM1.44$ untuk hari ketiga, dan seterusnya. Yang mana satukah pilihan anda? Tentusahkan jawapan anda.*

[14 markah]

- (7) (a) Find the chromatic number of the following graphs.
- (i) K_6 .
 - (ii) $K_{5,4}$.
 - (iii) C_5 .
- (b) Consider the bipartite graph $K_{3,4}$.
- (i) Draw the bipartite graph $K_{3,4}$.
 - (ii) Find a 2-coloring of the graph.
 - (iii) Find all the cycles of a vertex and show that they are even.

[14 marks]

...5/-

- (7) (a) Dapatkan nombor kromatik bagi graf-graf yang berikut.
- (i) K_6 .
 - (ii) $K_{5,4}$.
 - (iii) C_5 .
- (b) Pertimbangkan graf dwi partisi $K_{3,4}$.
- (i) Lukis graf dwi partisi $K_{3,4}$.
 - (ii) Dapatkan 2-pewarnaan bagi graf tersebut.
 - (iii) Dapatkan kesemua kitar bagi suatu bucu dan tunjukkan mereka adalah genap.

[14 markah]

- (8) (a) Using generating functions, determine the number of ways nine identical books can be distributed among three distinct children if each child receives at least two books and no more than four books.
- (b) Use generating functions to find the number of ways to select r objects of n different kinds if we must select at least one object of each kind.

[14 marks]

- (8) (a) Menggunakan fungsi penjana, tentukan bilangan cara sembilan buku yang sama boleh diagihkan kepada tiga kanak-kanak yang berbeza jika setiap kanak-kanak menerima sekurang-kurangnya dua buah buku dan tidak lebih daripada empat buah buku.
- (b) Gunakan fungsi penjana untuk mendapatkan bilangan cara memilih r objek daripada n jenis berbeza jika kita harus memilih sekurang-kurangnya satu objek daripada satu jenis.

[14 markah]