
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2010/2011 Academic Session

April/May 2011

MSG 253 – Queueing Systems and Simulation
[Sistem Giliran dan Simulasi]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of THIRTEEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA BELAS muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all three** [3] questions.

Arahan : Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) Consider an $M/M/1$ queueing model with a finite input of size M . The mean time that a customer spends outside the queueing system is $1/\lambda$ and the mean service time is $1/\mu$.
- (i) Draw a rate diagram of this queueing system.
- (ii) Show that the average number of customers in the queueing system is:

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda} [1 - P_0]$$

where

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

is the probability that the system is idle.

[50 marks]

- (b) A fast food restaurant is considering operating a drive-thru window food service operation. Assume that customer arrivals follow a Poisson probability distribution, with a mean arrival rate of 24 cars per hour, and that the service times follow an exponential probability distribution. Arriving customers place orders at an intercom station at the back of the parking lot and then drive to the service window to pay for and receive their orders. The following three service alternatives are being considered.

- A single-channel operation in which one employee fills the order and takes the money from the customer. The average service time for this alternative is 2 minutes.
- A single-channel operation in which one employee fills the order while a second employee takes the money from the customer. The average service time for this alternative is 1.25 minutes.
- A two-channel operation with two service windows and two employees. The employee stationed at each window fills the order and takes the money for customers arriving at the window. The average service time for this alternative is 2 minutes for each channel.

Answer the following questions for each alternative and recommend the best design for the fast food restaurant.

- (i) What is the probability that no cars are in the system?
- (ii) What is the average number of cars waiting for service?
- (iii) What is the average number of cars in the system?
- (iv) What is the average time a car waits for service?
- (v) What is the average time in the system?
- (vi) What is the probability that an arriving car will have to wait for service?

The following cost information is available for the fast food restaurant.

- Customer waiting time is valued at RM25 per hour to reflect the fact that waiting time is costly to the fast food business.
 - The cost (salary) of each employee is RM6.50 per hour.
 - To account for equipment and space, an additional cost of RM20 per hour is attributable to each channel.
- (vii) What is the lowest-cost design for the fast food business?

[50 marks]

1. (a) Pertimbangkan satu model giliran M/M/1 dengan input terhingga bersaiz M. Masa min seorang pelanggan berada diluar sistem giliran adalah $1/\lambda$ dan masa min layanan adalah $1/\mu$.

- (i) Lukiskan gambar rajah kadar bagi sistem giliran ini.
(ii) Tunjukkan bahawa bilangan purata pelanggan di dalam sistem giliran adalah:

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda} [1 - P_0]$$

dengan

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^M \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

adalah kebarangkalian bahawa sistem bersenang.

[50 markah]

- (b) Sebuah restoran makanan segera sedang menimbang untuk membuka perkhidmatan tingkap pandu-layan. Andaikan bahawa pelanggan tiba mengikut agihan Poisson dengan kadar ketibaan min 24 sejam dan masa layan adalah mengikut agihan eksponen. Pelanggan yang tiba akan memesan makanan mereka di stesyen interkom yang terletak di belakang tempat meletak kereta dan kemudiannya akan memandu ke tingkap perkhidmatan untuk membayar dan menerima pesanan mereka. Tiga pilihan perkhidmatan berikut sedang dipertimbangkan.

- Operasi satu-saluran dengan seorang pekerja untuk memenuhi pesanan pelanggan dan menerima bayaran. Masa purata layanan bagi pilihan ini adalah 2 minit.
- Operasi satu saluran dengan seorang pekerja untuk memenuhi pesanan pelanggan dan seorang lagi pekerja untuk menerima bayaran. Masa purata layanan bagi pilihan ini adalah 1.25 minit.
- Operasi dua-saluran dengan dua tingkap perkhidmatan dan dua pekerja. Pekerja yang ditugaskan di setiap tingkap akan memenuhi pesanan pelanggan dan menerima bayaran. Masa purata layanan bagi pilihan ini adalah 2 minit bagi setiap saluran.

Jawab persoalan berikut bagi setiap pilihan perkhidmatan dan cadangkan reka bentuk terbaik bagi restoran makanan segera itu.

- (i) Apakah kebarangkalian bahawa tidak ada kereta di dalam sistem?
(ii) Berapakah bilangan purata kereta yang sedang menunggu untuk dilayan?
(iii) Berapakah bilangan purata kereta di dalam sistem?
(iv) Berapakah masa purata sesebuah kereta menunggu untuk dilayan?
(v) Berapakah masa purata di dalam sistem?
(vi) Apakah kebarangkalian bahawa sebuah kereta yang tiba akan menunggu untuk dilayan?

Terdapat maklumat tentang kos seperti berikut untuk restoran makanan segera tersebut.

- Nilai masa menunggu pelanggan adalah RM25 sejam untuk menggambarkan betapa pentingnya masa menunggu dalam perniagaan makanan segera.
 - Kos (gaji) seorang pekerja adalah RM6.50 sejam.
 - Bagi mengambil kira peralatan dan ruang, kos tambahan sebanyak RM20 sejam dikenakan bagi setiap saluran.
- (vii) Pilihan yang manakah merupakan reka bentuk kos paling rendah untuk restoran makanan segera itu?

[50 markah]

2. (a) *Syed Department Store* operates a fleet of 10 trucks. The trucks arrive at random times throughout the day at the store's truck dock to be loaded with new deliveries or to have incoming shipments from the regional warehouse unloaded. Each truck returns to the truck dock for service two times per 8-hour day. The mean service rate is 4 trucks per hour. Determine the following operating characteristics.
- (i) The probability that no truck are at the truck dock.
 - (ii) The average number of trucks waiting for loading/unloading.
 - (iii) The average waiting time before loading/unloading begins.
 - (iv) What is the hourly cost of operation if the cost is RM50 per hour for each truck waiting and RM30 per hour for the truck dock operation?
 - (v) Consider a two-channel truck dock operation where the second channel could be operated for an additional RM30 per hour. Should the company consider expanding to the two-channel truck dock? Explain.

[35 marks]

- (b) Two operations are required to repair a roof: the old roof must be removed, and then the new one must be installed. The time between the beginning of the removal of the old roof and the completion of the installation of the new roof is important because the interior of the house may be damaged if it rains during this period. This period is called the *danger period*.

Customers call at random to a roof contractor at an average rate of 12 per month (4 weeks). It takes on average 0.5 week to remove a roof and 1 week to install a new one. Both times are exponentially distributed. The contractor has two kinds of crews, a removal crew and an installation crew. When an order arrives, the customer must wait until a removal crew is available for the job to begin. After the roof has been removed, the customer enters a queue to wait for an installation crew to become available for the job to continue.

- (i) Model this situation as a queueing network and draw the corresponding diagram. Show the relevant arrival and service rates for each station. Compute the minimum number of crews required for the two operations.
- (ii) Compute the average danger period if the minimum number of crews is used.

[35 marks]

- (c) A large insurance company has a central computing system that contains a variety of information about customer accounts. Insurance agents in a six-state area use telephone lines to access the customer information database. Currently, the company's central computer system allows three users to access the central computer simultaneously. Agents who attempt to use the system when it is full are denied access; no waiting is allowed. Management realizes that with its expanding business, more requests will be made to the central information system. Access requests follow a Poisson probability distribution, with a mean of 42 calls per hour. The mean service rate per line is 20 calls per hour.

- (i) What is the probability that an agent will be denied access to the system?
- (ii) What is the average number of access lines in use?
- (iii) In planning for future, management wants to be able to handle 50 calls per hour; in addition, the probability that an agent will be denied access to the system should be no greater than the value computed in part (i). How many access lines should this system have?

[30 marks]

2. (a) Pusat Membeli-belah Syed mengendalikan 10 buah truk. Truk-truk itu tiba pada waktu yang rawak sepanjang hari di pelantar truk pusat membeli belah untuk dimuatkan dengan barang untuk penghantaran kepada pelanggan ataupun untuk dipunggah muatan barangan yang di angkut daripada gudang-gudang yang berdekatan. Setiap truk akan kembali ke pelantar truk untuk perkhidmatan sebanyak dua kali sehari (8 jam). Kadar purata perkhidmatan adalah 4 truk sejam. Tentukan perkara-perkara yang berikut.

- (i) Kebarangkalian bahawa tidak ada truk di pelantar truk.
- (ii) Bilangan purata truk yang menunggu untuk dipunggah/dimuatkan.
- (iii) Masa purata menunggu sebelum pemunggahan/permuatan bermula.
- (iv) Berapakah kos pengoperasian sejam jika kos menunggu setiap truk adalah RM50 sejam dan kos mengendalikan pelantar truk adalah RM30 sejam?
- (v) Pertimbangkan pengendalian pelantar truk secara dua-saluran dengan kos pengendalian saluran kedua adalah tambahkan sebanyak RM30 sejam. Patutkah syarikat itu mengendalikan saluran kedua? Jelaskan.

[35 markah]

- (b) Dua operasi perlu dilakukan untuk memperbaiki bumbung: bumbung yang lama mesti dibuka dan kemudiannya bumbung yang baharu mesti dipasang. Masa di antara permulaan pembukaan bumbung yang lama sehingga persiapan pemasangan bumbung yang baharu adalah penting kerana sekiranya berlaku hujan pada masa berkenaan, bahagian dalaman rumah akan musnah. Jangka masa ini dikenali sebagai jangka masa merbahaya.

Panggilan pelanggan yang diterima oleh sebuah kontraktor bumbung berlaku secara rawak pada kadar purata 12 sebulan (4 minggu). Masa purata untuk membuka bumbung adalah 0.5 minggu dan masa purata pemasangan bumbung yang baharu adalah 1 minggu. Kedua-dua masa itu adalah mengikut agihan eksponen. Kontraktor itu mempunyai dua jenis krew, krew membuka dan krew memasang. Apabila sesuatu pesanan tiba, pelanggan itu mestilah menunggu sehingga wujud satu krew membuka supaya kerja boleh dimulakan. Setelah bumbung siap dibuka, pelanggan itu akan memasuki satu barisan menunggu untuk menanti kewujudan satu krew memasang supaya kerja boleh diteruskan.

- (i) Modelkan situasi ini sebagai suatu rangkaian giliran dan lukiskan gambar rajah yang berkaitan. Tunjukkan kadar ketibaan dan kadar layanan bagi setiap stesyen. Tentukan bilangan minimum krew yang diperlukan oleh kedua-dua operasi.
- (ii) Tentukan purata jangka masa merbahaya jika bilangan krew digunakan adalah pada tahap minimum.

[35 markah]

- (c) Sebuah syarikat insuran yang besar mempunyai satu sistem komputer induk yang mengandungi pelbagai maklumat tentang akaun pelanggan. Agen-agen insuran yang beroperasi di kawasan enam-negeri menggunakan talian telefon untuk mencapai pangkalan data maklumat pelanggan itu. Pada masa kini, sistem komputer induk itu hanya boleh dicapai oleh tiga pengguna secara serentak. Agen yang cuba mengguna sistem itu apabila ialah penuh akan dihalang daripada mencapainya dan mereka tidak dibenarkan menunggu. Pihak pengurusan sedar bahawa dengan berkembangannya perniagaan mereka, permintaan untuk penggunaan sistem itu akan meningkat. Permintaan daripada agen untuk mencapai sistem itu adalah mengikut agihan Poisson dengan min 42 panggilan sejam. Min masa layan bagi setiap talian adalah 20 panggilan sejam.

- (i) Apakah kebarangkalian bahawa seseorang agen akan dihalang daripada mencapai sistem itu?
- (ii) Berapakah bilangan purata talian yang digunakan?
- (iii) Untuk perancangan masa hadapan, pihak pengurusan mahu supaya sistem itu dapat mengendalikan sehingga 50 panggilan sejam; tambahan pula, kebarangkalian bahawa seseorang agen akan dihalang daripada mencapai sistem itu mestilah tidak melebihi nilai yang telah dihitung di bahagian (i). Berapakah talian capaian yang harus disediakan oleh sistem itu?

[30 markah]

3. (a) Special tanker ships are used to transport liquid natural gas (LNG) between a port in East Malaysia and a storage facility located in West Malaysia. Loading time at the East Malaysia port and the unloading time at the West Malaysia storage facility follow the distribution shown below:

<i>Loading Time</i> (days)	<i>Probability</i>	<i>Unloading Time</i> (days)	<i>Probability</i>
1	0.3	1	0.2
2	0.4	2	0.5
3	0.3	3	0.3

Travel time between ports can be described by the same distribution regardless of which direction the tanker travels:

<i>Travel Times</i> (days)	<i>Probability</i>
7	0.1
8	0.2
9	0.3
10	0.3
11	0.1

Each ship can transport 1 billion cubic feet of LNG per trip. Port facilities are such that only one ship at a time can be loaded or unloaded. The current contract calls for supplying 12 billion cubic feet of LNG. Three tankers have been leased, at a cost of RM12,000 per day, and are scheduled to arrive for initial loading at the East Malaysia port at 2-day intervals. The leasing cost does not begin until the ships reach the East Malaysia port.

Simulate, using hand, the delivery of the 10 billion cubic feet of LNG, providing answers to the following questions:

- How long does the delivery process take?
- What was the total leasing cost for the tankers, if cost end as soon as each ship has unloaded after its fourth trip.
- What proportion of the cost was spent by ships waiting to be loaded or unloaded?

(Use the enclosed 2-digit random number table with the second column for *loading time*, third column for *unloading time* and the forth column for the *travel time*)

[60 marks]

- (b) Refer to Question 3(a). Write a GPSSPC program that can be used to simulate the shipment of 1000 billion cubic feet of LNG from a port in East Malaysia to a storage facility in West Malaysia.

[40 marks]

3. (a) Kapal tangki khas digunakan untuk membawa gas cair asli (LNG) di antara sebuah pelabuhan di Malaysia Timur dan sebuah tempat kemudahan penyimpanan di Malaysia Barat. Masa pemuatan di pelabuhan di Malaysia Timur dan masa pemunggahan di tempat penyimpanan di Malaysia Barat adalah mengikut pengagihan seperti berikut:

Masa Pemuatan (hari)	Kebarangkalian	Masa Pemunggahan (hari)	Kebarangkalian
1	0.3	1	0.2
2	0.4	2	0.5
3	0.3	3	0.3

Masa perjalanan di antara pelabuhan boleh dinyatakan dengan agihan yang sama tanpa menghiraukan arah mana kapal bergerak:

Masa Perjalanan (hari)	Kebarangkalian
7	0.1
8	0.2
9	0.3
10	0.3
11	0.1

Setiap kapal boleh membawa muatan 1 billion kaki kubik LNG setiap perjalanan. Di pelabuhan, hanya sebuah kapal boleh mengisi atau memunggah pada satu masa. Kontrak terkini menghendaki bekalan sebanyak 12 billion kaki kubik LNG. Tiga kapal tangki telah disewa pada harga RM12,000 sehari sekawal dan dijadualkan tiba satu persatu untuk muatan permulaan di pelabuhan di Malaysia Timur pada selang dua hari. Kos penyewaan tidak bermula sehinggalah kapal tiba di pelabuhan Malaysia Timur.

Lakukan simulasi menggunakan tangan, penghantaran 12 billion kaki kubik LNG, yang bertujuan mendapatkan jawapan kepada soalan-soalan berikut:

- Berapa lamakah masa yang diambil untuk penghantaran?
- Berapakah jumlah kos penyewaan kapal tangki, jika kos penyewaan tamat sebaik sahaja setiap kapal telah memunggah muatan selepas perjalanan keempat.
- Apakah kadar kos yang dibelanjakan untuk kapal menunggu untuk dimuat atau dipunggah muatannya?

(Gunakan jadual nombor rawak 2-digit yang dilampirkan dengan lajur kedua untuk masa muatan, lajur ketiga untuk masa memunggah dan lajur keempat untuk masa perjalanan)

[60 markah]

- (b) Rujuk kepada soalan 3(a). Tuliskan satu program GPSSPC yang boleh digunakan untuk mensimulasikan penghantaran 1000 kaki kubik LNG daripada pelabuhan di Malaysia Timur ke tempat penyimpanan di Malaysia Barat.

[40 markah]

APPENDIX 1 / LAMPIRAN 1

Formulas for Queueing Theory:

1. M/M/1:

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$P_n = 1 - \rho \quad \rho^n \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu (\mu - \lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad , \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu (\mu - \lambda)}$$

$$P_{w > t} = e^{-t/w}$$

$$P[w_q > t] = \rho e^{-t/w}$$

2. M/M/s:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \left[\frac{\lambda / \mu^s}{s!} \frac{1}{1 - \rho} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\lambda / \mu^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda / \mu^n}{n!} P_0 & , \quad \text{if } 0 \leq n \leq s \\ \frac{\lambda / \mu^n}{s! s^{n-s}} P_0 & , \quad \text{if } n > s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{\lambda / \mu^s \rho}{s! (1 - \rho)^2} P_0$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad W = W_q + 1 / \mu$$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$P[w_q > t] = e^{-\mu t} \left[1 + \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s}{s! (1 - \rho)} \left(\frac{1 - e^{-\mu t}}{s - 1 - \lambda / \mu} \right) \right]$$

$$P[w_q > t] = \left[1 - P_{w_q = 0} \right] e^{-s\mu t (1 - \rho)}$$

$$\text{where } P_{w_q = 0} = \sum_{n=0}^{s-1} P_n$$

APPENDIX 2 / LAMPIRAN 2

3. $M/M/s$: finite population of size M .

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s}^M \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n & , \text{ if } 0 \leq n \leq s \\ P_0 \binom{M}{n} \left(\frac{n!}{s^{n-s} s!} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n & , \text{ if } s < n \leq M \\ 0 & , \text{ if } n > M \end{cases}$$

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{s-1} n \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s}^M n \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]$$

$$L_q = L - s + P_0 \sum_{n=0}^{s-1} (s-n) \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$W = \frac{L}{\lambda(M-L)}, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M-L)}$$

4. $M/G/1$:

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

5. $M/E_k/1$:

$$L_q = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = W_q + 1/\mu$$

$$L = \lambda W$$

APPENDIX 3 / LAMPIRAN 3

6. $M/M/1/k$:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \rho^n & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{k+1} & \rho = 1 \end{cases}$$

For $\rho \neq 1$

$$L = \frac{\rho [1 - \frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}]}{1-\rho^{k+1}}$$

$$L_q = L - \frac{\rho}{1-\rho} = L - \frac{\rho}{1-\rho^{k+1}}$$

$$W = L / \lambda' \quad , \quad \lambda' = \mu (L - L_q)$$

$$W_q = W - 1/\mu = L_q / \lambda'$$

For $\rho = 1$

$$L = \frac{k}{2}$$

7. $M/M/s/k$:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & 0 \leq n < s \\ \frac{1}{s^{n-s} s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & s \leq n \leq k \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{\lambda / \mu^s}{s!} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{k-s+1}}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}} \right]^{-1} & \text{for } \left(\frac{\lambda}{s\mu} \neq 1 \right) \\ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{\lambda / \mu^s}{s!} (k-s+1) \right]^{-1} & \text{for } \left(\frac{\lambda}{s\mu} = 1 \right) \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s}{s!} \left[1 - \rho^{k-s+1} - \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{k-s} \right]$$

APPENDIX 4 / LAMPIRAN 4

$$L = L_q + s - P_0 \sum_{n=0}^{s-1} \frac{s-n}{n!} \rho s^n$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \quad \lambda' = \lambda (1 - P_k)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

8. $M/M/s/s$:

$$P_n = \frac{\lambda / \mu^n / n!}{\sum_{i=0}^s \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i / i!} \quad \text{for } 0 \leq n \leq s$$

$$P_s = \frac{s \rho^s / s!}{\sum_{i=0}^s s \rho^i / i!} \quad \text{where } \left(\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \right).$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} (1 - P_s) \quad , \quad W = \frac{L}{\lambda'} \quad \text{where } \lambda' = \lambda (1 - P_s)$$

9. $M/M/\infty$:

$$P_n = \frac{\lambda / \mu^n e^{-\lambda/\mu}}{n!} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$L = \lambda / \mu$$

$$W = \frac{1}{\mu}$$

APPENDIX 5 / LAMPIRAN 5

10. $M/M/1$: state-dependent service

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & 1 \leq n \leq k \\ \mu & n \geq k \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\frac{1 - \rho_1^k}{1 - \rho_1} + \frac{\rho \rho_1^{k-1}}{1 - \rho} \right]^{-1} \quad \rho_1 = \lambda / \mu_1, \rho = \lambda / \mu < 1$$

$$L = P_0 \left[\frac{\rho_1 \left[1 + \frac{k-1}{2} \rho_1^k - k \rho_1^{k-1} \right]}{1 - \rho_1^2} + \frac{\rho \rho_1^{k-1} \left[k - \frac{k-1}{2} \rho \right]}{1 - \rho^2} \right]$$

$$L_q = L - 1 - P_0$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1 - P_0}{\lambda}$$

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu_1} \right)^n P_0 & 0 \leq n < k \\ \frac{\lambda^n}{\mu_1^{k-1} \mu^{n-k+1}} P_0 & n \geq k \end{cases}$$

11. $M/M/1$: finite population of size M .

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^M \frac{M!}{M-n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

$$P_n = \frac{M!}{M-n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 \quad \text{for } n = 1, 2, \dots, M$$

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$L_q = M - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda'} \quad \text{where } \lambda' = \lambda (M - L)$$

APPENDIX 6 / LAMPIRAN 6

TWO-DIGIT RANDOM NUMBER TABLE

03	26	48	92	38	96	41	04	35	84
71	44	81	46	44	47	07	20	58	04
33	75	06	41	87	72	63	88	59	54
53	71	27	13	37	45	89	61	30	26
41	15	43	91	46	81	57	39	34	86
16	18	75	11	26	80	93	97	29	33
88	50	00	56	70	19	90	00	93	95
13	10	08	15	29	33	75	70	43	05
15	72	73	69	27	75	72	95	99	56
64	10	99	02	18	26	78	69	19	12
98	66	53	86	34	71	09	88	56	08
43	05	06	19	91	78	03	65	08	16
69	82	02	61	98	50	74	84	60	41
06	40	10	24	68	42	39	97	25	55
34	86	83	41	33	83	85	92	32	29
46	05	92	36	82	04	67	05	18	69
28	73	59	56	43	88	61	17	07	48
35	53	49	39	98	14	16	76	69	10
90	90	18	27	75	08	75	17	55	68
62	32	97	16	33	66	02	34	62	26