

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2010/2011 Academic Session

April/May 2011

**MAA 111 – Algebra for Sciences Students**  
***[Aljabar untuk Pelajar Sains]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all three** [3] questions.

**[Arahan:** Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. Indicate whether each statement is true or false.
- (a) For any  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , we have  $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$ .
  - (b) For any invertible matrix  $A$ , we have  $\det A^{-1}=\det A$ .
  - (c) Any set of orthogonal vectors is linearly independent.
  - (d) A square  $n\times n$  matrix is diagonalizable precisely when it has  $n$  linearly independent eigenvalues.
  - (e) The span of any set of  $n$  vectors is a vector space with dimension  $n$ .
  - (f) If  $\mathbf{v}$  is an eigenvector for  $A$ , then  $\alpha \mathbf{v}$  is an eigenvector for  $A$  for  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
  - (g) If  $A$  is diagonalizable, then  $A^T$  is diagonalizable.
  - (h) If  $A$  is invertible, then the reduced echelon-form of  $A$  is the identity.
  - (i) If the column of a matrix are dependant, then so are the rows.
  - (j) The column space of a  $2\times 2$  matrix is the same as its row space.
- [10 marks]

2. State all definitions of the following;
- (a) An eigenvalue, an eigenvector and an eigenspace.
  - (b) Linear independent set.
  - (c) Basis and dimension of a subspace of  $\mathbb{R}^n$ .
  - (d) Linear transformation  $T:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
  - (e) Row space, column space and null space.
  - (f) Rank and nullity.
- [10 marks]

3. Suppose  $A$  is an  $n\times n$  matrix and the homogeneous system  $(A^2)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$  has a unique solution. What can you say about the linear system  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , is it consistent? if so, is the solution unique? or infinitely many? Justify your answer.
- [5 marks]

4. Suppose  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  is a consistent linear system. Explain why that every solution to the linear system  $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$  is a least squares solution to the system  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
- [5 marks]

1. Nyatakan samada setiap pernyataan berikut adalah benar atau palsu.
  - (a) Bagi setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , dapat ditunjukkan bahawa  $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .
  - (b) Bagi setiap matriks sonsangan  $A$ , dapat ditunjukkan bahawa penentu  $A^{-1} = \text{penentu } A$ .
  - (c) Setiap set vektor ortogon adalah tak bersandar linear.
  - (d) Suatu matriks segiempat sama  $A$  bersaiz  $n \times n$  adalah tersonsangkan apabila ia mempunyai  $n$  nilai eigen yang tak bersandar linear.
  - (e) Rentangan bagi setiap set yang mempunyai  $n$  vektor adalah suatu ruang vektor berdimensi  $n$ .
  - (f) Jika  $\mathbf{v}$  adalah vector eigen bagi  $A$ , maka  $\alpha \mathbf{v}$  juga adalah vektor eigen bagi  $A$  di mana  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
  - (g) Jika  $A$  terpepenjurukan, maka  $A^T$  juga terpepenjurukan.
  - (h) Jika  $A$  ialah matriks tersongsangkan, maka bentuk eselon baris terturun bagi  $A$  adalah matriks identiti.
  - (i) Jika semua lajur bagi suatu matriks bersandar linear, maka begitu juga dengan semua vektor baris matriks tersebut.
  - (j) Ruang lajur bagi matriks  $2 \times 2$  adalah sama dengan ruang baris matriks tersebut.

[10 markah]

2. Berikan definisi bagi setiap pernyataan dibawah;
  - (a) Nilai eigen, vektor eigen dan ruang eigen.
  - (b) Set tak bersandar linear.
  - (c) Asas dan dimensi untuk subruang  $\mathbb{R}^n$ .
  - (d) Transformasi linear  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
  - (e) Ruang vektor baris, Ruang vektor lajur dan ruang nol.
  - (f) Pangkat dan kenolan.

[10 markah]

3. Andaikan  $A$  adalah suatu matriks bersaiz  $n \times n$  dan sistem homogen  $(A^2)^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$  mempunyai penyelesaian unik. Apa yang boleh kamu katakan mengenai sistem linear  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , adakah ianya konsisten? Jika ya, adakah penyelesaian sistem tersebut unik? atau lebih dari satu penyelesaian? Berikan alasan pada jawapan anda.

[5 markah]

4. Andaikan  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$  adalah suatu sistem linear yang konsisten. Terangkan kenapa setiap penyelesaian kepada sistem linear  $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$  adalah penyelesaian kuasa dua terkecil kepada sistem  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

[5 markah]

5. Suppose  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  are two different solutions to the system  $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Is  $\mathbf{v} - \mathbf{u}$  a solution to the system  $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ? Justify your answer. [2 marks]

6. Suppose  $A$  is a  $3 \times 3$  matrix such that  $\text{row } 1 + \text{row } 2 = \text{row } 3$ . Is  $A$  invertible? Give reason to your answer. [2 marks]

7. Consider  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ ;

- (a) Find all  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  such that the system  $A \mathbf{x} = \mathbf{u}$  is consistent.
- (b) Find bases for  $\text{Row}(A)$ ,  $\text{Col}(A)$  and  $\text{Null}(A)$ ?
- (c) What is  $\text{rank}(A)$  and  $\text{nullity}(A)$ ?

[15 marks]

8. Find all vectors such that  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  in the column space of  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

[6 marks]

9. Let  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

- (a) Find an  $LU$  - decomposition of  $A$
- (b) Express  $A$  in the form  $A = L_1 D_1 U_1$ , where  $L_1$  is lower triangular with 1's along the main diagonal,  $U_1$  is upper triangular and  $D_1$  is a diagonal matrix.

[15 marks]

5. Andaikan  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah dua penyelesaian berbeza kepada sistem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Adakah  $\mathbf{v} - \mathbf{u}$  suatu penyelesaian kepada sistem  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ? Berikan alasan pada jawapan anda.

[2 markah]

6. Andaikan  $A$  suatu matriks bersaiz  $3 \times 3$  di mana baris 1 + baris 2 = baris 3. Adakah  $A$  tersongsangkan? Berikan alasan pada jawapan anda.

[2 markah]

7. Pertimbangkan  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ ;

- (a) Cari semua  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  di mana sistem  $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$  adalah konsisten.  
(b) Cari asas untuk Baris ( $A$ ), Lajur ( $A$ ) and Nol ( $A$ )?  
(c) Apakah pangkat ( $A$ ) dan kenolan ( $A$ )?

[15 markah]

8. Cari semua vektor di mana  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  di dalam ruang lajur bagi matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

[6 markah]

9. Andaikan  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

- (a) Dapatkan gubahan LU bagi  $A$   
(b) Tuliskan  $A$  dalam bentuk  $A = L_1 D_1 U_1$ , di mana  $L_1$  adalah matriks segitiga bawah dengan nilai 1 pada pepenjuru utama,  $U_1$  adalah matriks segitiga atas dan  $D_1$  adalah matriks pepenjuru.

[15 markah]

10. Given  $\left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ , find orthogonal set of vectors  $\{ A, B, C \}$ , then

(a) compute the projection of  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  onto the span  $\{ A, B, C \}$ .

(b) Express any vector  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  as a linear combination of  $A, B, C$ .

[10 marks]

11. Let

$$x - y = 3$$

$$2x + y = -1$$

$$x + 5y = 4$$

(a) Show this linear system is not consistent.

(b) Find the best approximation to a solution of the system.

[10 marks]

12. Find a homogeneous system whose solution space is spanned by the following three vectors

$$\mathbf{u} = (1, -2, 0, 3, -1), \mathbf{v} = (2, -3, 2, 5, -3) \text{ and } \mathbf{w} = (1, -2, 1, 2, -2).$$

[10 marks]

10. Diberi  $\left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ , dapatkan set vektor ortogon  $\{ A, B, C \}$ , kemudian

(a) Kira unjuran bagi  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  ke dalam rentangan  $\{ A, B, C \}$ .

(b) Tunjukkan bahawa setiap vektor  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  dapat ditulis sebagai gabungan linear dari  $A, B, C$ .

[10 markah]

11. Diberi

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x + y &= -1 \\ x + 5y &= 4 \end{aligned}$$

- (a) Tunjukkan sistem linear diatas tidak konsisten.  
(b) Dapatkan penghampiran terbaik bagi penyelesaian kepada sistem diatas.

[10 markah]

12. Dapatkan suatu sistem homogen di mana ruang penyelesaian sistem tersebut direntang oleh tiga vektor berikut;

$$\mathbf{u} = (1, -2, 0, 3, -1), \mathbf{v} = (2, -3, 2, 5, -3) \text{ dan } \mathbf{w} = (1, -2, 1, 2, -2).$$

[10 markah]