

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2010/2011 Academic Session

April/May 2011

**MAT 111 – Linear Algebra**  
***[Aljabar Linear]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all four** [4] questions.

**Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. (a) (i) Write out the  $4 \times 4$  matrix  $A = [a_{ij}]$  whose entries are given by

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & \text{if } i = j \\ i - j & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (ii) Solve the matrix operation  $A^2 + AB + CA + CB$  given that

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ and } A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (b) Given

$$\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + a^2 + 1z &= 3a \end{aligned}.$$

Determine all values of  $a$  for which the system has

- (i) no solution
  - (ii) exactly one solution, or
  - (iii) infinitely many solutions.
- (c) Given that the following augmented matrix represents a system of linear equations with unknowns  $x_1, x_2, x_3$  and  $x_4$ :

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

- (i) Reduce the augmented matrix to its reduced row-echelon form (RREF) using the Gauss-Jordan procedure. (*You must show all elementary row operations (ERO) used*)
  - (ii) From the RREF you obtained in (i), find the solution to the system.
  - (iii) If the system is represented as  $Ax = b$ , then what will be the solution to its corresponding homogeneous system  $Ax = 0$ ?
- (d) (i) Prove that if  $A$  and  $B$  are skew-symmetric matrices then  $AB^2A$  is symmetric.
- (ii) If two matrices  $A$  and  $B$  are diagonal, then prove that  $AB$  is also diagonal.  
[Hint: Let  $A=[a_{ij}]$  and  $B=[b_{ij}]$  and consider the  $(i, j)$ th-entries in  $A, B$  and  $AB$ ]  
(Do not use Examples!)

[100 marks]

1. (a) (i) Tuliskan matriks  $3 \times 3$   $A = [a_{ij}]$  yang pemasukannya diberi sebagai

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i + j \text{ genap} \\ 0 & \text{yang selainnya} \end{cases}$$

- (ii) Selesaikan operasi matriks  $A^2 + AB + CA + CB$  diberi

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (b) Diberi

$$\begin{aligned} x + y + 7z &= -7 \\ 2x + 3y + 17z &= -16 \\ x + 2y + a^2 + 1z &= 3a \end{aligned}.$$

Tentukan semua nilai  $a$  sedemikian hingga sistem tersebut mempunyai

- (i) tiada penyelesaian  
 (ii) hanya satu penyelesaian, atau  
 (iii) penyelesaian yang tak terhingga banyaknya.
- (c) Diberi matriks imbuhan berikut mewakili sistem persamaan linear dengan anu  $x_1, x_2, x_3$  and  $x_4$ :

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

- (i) Turunkan matriks imbuhan tersebut kepada bentuk eselon baris terturun (BEBT) menggunakan prosedur Gauss-Jordan. (Anda perlu tunjukkan semua operasi baris permulaan (OBP) yang digunakan).
- (ii) Dari BEBT yang diperoleh dalam (i), cari penyelesaian sistem.
- (iii) Jika sistem diwakilkan dengan  $Ax = b$ , maka apakah penyelesaian bagi sistem homogenya yang sepadan  $Ax = 0$ ?
- (d) (i) Buktikan jika  $A$  dan  $B$  adalah simetri pencong maka  $AB^2A$  adalah simetri.
- (ii) Jika dua matriks  $A$  dan  $B$  pepenjuru, maka buktikan bahawa  $AB$  juga pepenjuru.  
 [Petunjuk: Biar  $A = [a_{ij}]$  dan  $B = [b_{ij}]$  dan pertimbangkan pemasukan  $(i, j)$  dalam  $A, B$  dan  $AB$ ]  
 (Jangan gunakan Contoh!)

[100 markah]

2. (a) (i) Determine whether the following set equipped with the given operations is a vector space or not. If it is not a vector space, identify ONE vector space axiom that fails and give a counter-example to justify your claim.

$$S = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

Addition:  $(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Scalar Multiplication:  $k \square (x, y, z) = (kx, ky, kz + 1)$

- (ii) Show that  $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = 1 - b \right\}$  is not a subspace.

- (b) (i) Given that  $S = \{ (1, -1, 2), (2, -1, 2), (-4, 1, -2) \}$ . Find the basis for the linear span of  $S$ ,  $\mathcal{L} S$  which contains  $(1, -1, 2)$  if given that  $\dim \mathcal{L} S < 3$ .

- (ii) Extend the basis obtained in (i) to a basis for  $\mathbb{R}^3$ . Justify.  
(Note: No marks will be given for (ii) if you answered (i) wrongly.)

- (c) Let  $u, v$  and  $w$  be linearly independent vectors. Show that  $u - v, v - w, w - u$  is linearly dependent.

- (d) Find the dimension of  $W = \{ f(x) \in P_n(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \}$ .

[100 marks]

3. (a) Given

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (i) Determine the basis for its column space.  
(ii) Determine the basis for its row space.  
(iii) Deduce the rank of  $A$ ,  $\rho(A)$ .

- (b) Given  $W$  is a subspace of  $\mathbb{R}^4$  where  $W = \mathcal{L} \{ (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 0) \}$ .

- (i) Use the Gram-Schmidt process to find the orthogonal basis of  $W$ .  
(ii) Find the orthogonal complement for  $W$ ,  $W^\perp$ .  
(iii) Explain why  $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ .

2. (a) (i) Tentukan sama ada set berikut yang dibekalkan dengan operasi-operasi diberi adalah ruang vector atau tidak. Jika bukan ruang vektor, kenalpasti

SATU aksiom ruang vektor yang gagal dan beri contoh lawan untuk mengesahkan tuntutan anda.

$$S = (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}$$

Penambahan:  $x_1, y_1, z_1 \oplus x_2, y_2, z_2 = x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2$

Pendaraban Skalar:  $k \square x, y, z = kx, ky, kz + 1$

(ii) Tunjukkan bahawa  $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = 1 - b \right\}$  bukan subruang.

(b) (i) Diberi  $S = \{ (1, -1, 2), (2, -1, 2), (-4, 1, -2) \}$ . Cari asas bagi rentangan linear  $U, \mathcal{L} U$  yang mengandungi  $(1, -1, 2)$  jika diberi  $\dim \mathcal{L} S < 3$ .

(ii) Lanjutkan asas yang diperolehi dalam (i) kepada asas untuk  $\mathcal{Y}^3$ . Berikan alasan.

(Nota: Tiada markah untuk jawapan anda dalam (ii) jika anda telah menjawab (i) dengan salah.)

(c) Biar  $u, v$  dan  $w$  tak bersandar linear. Tunjukkan bahawa  $u - v, v - w, w - u$  bersandar linear.

(d) Cari dimensi bagi  $W = \{ f(x) \in P_n(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \}$ .

[100 markah]

3. (a) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Tentukan asas untuk ruang lajurnya.

(ii) Tentukan asas untuk ruang barisnya.

(iii) Buat kesimpulan tentang pangkat  $A, \rho(A)$ .

(b) Diberi  $W$  ialah subruang dari  $\mathcal{Y}^4$  dengan  $W = \mathcal{L} \{ (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 0) \}$ .

(i) Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mencari asas ortonormal untuk  $W$ .

(ii) Cari pelengkap berortogon untuk  $W, W^\perp$ .

(iii) Terangkan mengapa  $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ .

(c) Find the equation of a line  $y = mx + b$  that best fits the following data using the method of least squares:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 3 & 2 & 1 & 4 \\ \hline y & 5 & 7 & 4 & 9 \end{array}$$

- (d) Let  $v_1, v_2, \dots, v_r$  be a basis for an inner product space  $V$ . Show that the zero vector is the only vector in  $V$  that is orthogonal to all of the basis vectors.

[100 marks]

4. (a) Given the linear transformation  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  defined by

$$(x, y, z)T = (-x + y, -y, 0)$$

- (i) Find the standard matrix for  $T$ .
- (ii) Find the kernel for  $T$ ,  $\text{Ker } T$ , and deduce its basis.
- (iii) Find the image for  $T$ ,  $\text{Im } T$ , and deduce its basis.
- (iv) Is  $T$  one-to-one? Is  $T$  onto? Explain your answers.
- (v) Does  $T$  have an inverse? Explain your answer.

- (b) Let the linear transformation  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  defined by

$$(x, y, z)T = (3x - y - 2z, 2x - 2z, 2x - y - z)$$

with bases  $\alpha = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  and  $\beta = (1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, -2, 1)$ .

- (i) Find  $(x, y, z)_\beta$ .
- (ii) Compute for  $T_{\beta, \alpha}$ .
- (iii) Verify your answer in (ii) by showing that  $(x, y, z)_\alpha T_{\alpha, \beta} = (x, y, z)_\beta T$ .

- (c) Prove that:

- (i) if  $\lambda$  is a non-zero eigenvalue of a non-singular matrix  $A$ , then  $\frac{1}{\lambda}$  is an eigenvalue of  $A^{-1}$ .
- (ii) if 0 is an eigenvalue of a matrix  $A$ , then  $A^2$  is singular.

- (d) Either diagonalize the matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

or show that  $A$  is not diagonalizable.

[100 marks]

- (c) Cari persamaan  $y = mx + b$  yang memadankan data berikut dengan terbaik menggunakan kaedah kuasa dua terkecil:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 3 & 2 & 1 & 4 \\ \hline y & 5 & 7 & 4 & 9 \end{array}$$

- (d) Biar  $v_1, v_2, \dots, v_r$  menjadi asas untuk suatu ruang hasil darab terkedalam  $V$ . Tunjukkan bahawa vektor sifar sahaja yang berortogon dengan semua vektor asas tersebut.

[100 markah]

4. (a) Diberi transformasi linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  yang ditakrifkan dengan

$$(x, y, z)T = -x + y, -y.$$

- (i) Cari matriks asas untuk  $T$ .
- (ii) Cari inti  $T$ ,  $\text{Ker } T$  dan beri kesimpulan untuk asasnya.
- (iii) Cari imej  $T$ ,  $\text{Im } T$ .
- (iv) Adakah  $T$  satu-ke-satu? Adakah  $T$  keseluruhan? Terangkan jawapan anda.
- (v) Adakah  $T$  mempunyai songsang?

- (b) Biar transformasi linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ditakrifkan oleh

$$(x, y, z)T = 3x - y - 2z, 2x - 2z, 2x - y - z$$

dengan asas  $\alpha = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  dan  $\beta = (1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, -2, 1)$ .

- (i) Cari  $(x, y, z)_\beta$ .
- (ii) Dapatkan  $T_{\beta, \alpha}$ .
- (iii) Tentusahkan jawapan anda dalam (ii) dengan menunjukkan bahawa  $x_\alpha T_{\alpha, \beta} = xT_\beta$ .

- (c) Buktikan bahawa:

- (i) jika  $\lambda$  ialah nilai eigen bukan sifar bagi suatu matriks tak singular  $A$ , maka  $\frac{1}{\lambda}$  ialah nilai eigen bagi  $A^{-1}$ .
- (ii) jika  $0$  ialah nilai eigen bagi matriks  $A$ , maka  $A^2$  adalah tak singular.

- (d) Sama ada pepenjurukan matriks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

atau tunjukkan bahawa  $A$  tak terpepenjurukan.

[100 markah]