
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2010/2011 Academic Session

April/May 2011

MSG 356 – Mathematical Programming
[Pengaturcaraan Matematik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

[Arahan: Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. A company intends to employ 3 part-time employees and 5 full-time employees. The normal workload is 40 hours per week for full-time and 20 hours per week for part-time employees. Each full-time employee is paid RM6 per hour for work up to 40 hours per week and can sell 5 items per hour. A full-time employee who works overtime is paid RM10 per hour. Each part-time employee is paid RM3 per hour and can sell 3 items per hour. The cost price for the item is RM6, and each item is being sold for RM9. This company has a weekly operating expense of RM500. The company has established its goals in the following priority:

Goal 1 Sell at least 1,600 items per week

Goal 2 Earn a profit of at least RM2,200 per week

Goal 3 Full-time employees should work at most 100 hours of overtime

Goal 4 To increase their sense of job security, the number of hours by which each full-time employee fails to work 40 hours per week should be minimized.

Formulate a preemptive goal programming model that could be used to determine how many hours per week each employee should work.

[25 marks]

2. Use the Dantzig-Wolfe decomposition algorithm to solve the following problem:

$$\text{Max} \quad z = 14x_1 + 10x_2 + 6x_3$$

$$\text{Subject to: } 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$2x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 6$$

$$4x_2 + 2x_3 \leq 16$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

[25 marks]

3. Carry out the first two iterations of Karmarkar's algorithm for the following problem.

$$\text{Min} \quad z = 2x_2 - x_3$$

$$\text{Subject to: } x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

[25 marks]

1. Sebuah syarikat bercadang untuk mengambil 3 pekerja sambilan dan 5 pekerja penuh masa. Beban kerja biasa ialah 40 jam seminggu untuk pekerja penuh masa, manakala hanya 20 jam seminggu untuk pekerja sambilan. Setiap pekerja penuh masa dibayar RM6 setiap jam untuk beban kerja hingga 40 jam seminggu dan boleh menjual 5 unit sesuatu produk sejam. Seorang pekerja penuh masa yang bekerja lebih masa akan dibayar RM10 setiap jam. Setiap pekerja sambilan dibayar RM3 setiap jam dan boleh menjual 3 unit sesuatu produk sejam. Kos seunit produk tersebut ialah RM6, dan setiap unit akan dijual dengan harga RM9. Kos operasi mingguan tetap yang ditanggung oleh syarikat ialah RM500. Syarikat ini mempunyai beberapa matlamat (gol) mengikut keutamaan berikut:

Gol 1 Jual sekurang-kurangnya 1,600 unit sesuatu produk setiap minggu

Gol 2 Mengaut keuntungan sekurang-kurangnya RM2,200 setiap minggu

Gol 3 Pekerja penuh masa boleh bekerja paling banyak 100 jam kerja lebih masa.

Gol 4 Untuk meningkatkan jaminan pekerjaan mereka, jumlah jam bekerja yang kurang daripada 40 jam seminggu untuk pekerja penuh masa harus diminimumkan.

Rumuskan satu pengaturcaraan gol preemptif yang boleh digunakan untuk menentukan berapa jam setiap pekerja perlu bekerja setiap minggu.

[25 markah]

2. Gunakan algoritma penguraian Dantzig-Wolfe untuk menyelesaikan masalah berikut:

$$\text{Maksimumkan } z = 14x_1 + 10x_2 + 6x_3$$

$$\text{terhadap: } 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 20$$

$$2x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 6$$

$$4x_2 + 2x_3 \leq 16$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

[25 markah]

3. Jalankan dua lelaran pertama algoritma Karmarkar untuk masalah berikut:

$$\text{Minimumkan } z = 2x_2 - x_3$$

$$\text{terhadap: } x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

[25 markah]

4. Convert the following problem into Karmarkar's special form:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{Subject to:} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

[25 marks]

5. On the given set S , determine whether the following function is convex, concave, or neither.

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 0.5x_1x_2; S = \mathbb{R}^3$$

[25 marks]

6. A company manufactures two products. If it charges a price p_i for product i , it can sell q_i units of product i , where, $q_1 = 60 - 3p_1 + p_2$ and $q_2 = 80 - 2p_2 + p_1$. It costs RM25 to produce a unit of product 1 and RM72 to produce a unit of product 2. How many units of each product should be produced to maximize profits? *Hint: NLP problem and Hessian matrix.*

[25 marks]

7. A company has two factories, each manufacturing the same product. Factory A produces x units of the product at a cost of $2x^2 + 50,000$ ringgit, and factory B can produce y units at a cost of $y^2 + 40,000$ ringgit. If an order for 1200 units is to be filled, how should the production be distributed among the two factories in order to minimize the total production cost? Also, what is the minimum cost? *Hint: Use the Lagrange method for optimization.*

[25 marks]

8. Use the Kuhn-Tucker conditions to find the optimal solution to the following NLP:

$$\text{Min} \quad z = x_1 - 3x_1^2 + x_2 - 5x_2^2$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to:} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

[25 marks]

4. Tukarkan masalah berikut kepada bentuk khas Karmarkar

Minimumkan $z=3x_1 + 4x_2$
terhadap

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

[25 markah]

5. Tentukan samada fungsi berikut cembung, cekung atau bukan kedua-duanya.

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 0.5x_1x_2; S = R^3$$

[25 markah]

6. Sesebuah syarikat mengeluarkan dua jenis produk. Jika ia mengenakan satu harga p_i untuk produk i , ia boleh menjual q_i unit produk i , di mana, $q_1 = 60 - 3p_1 + p_2$ dan $q_2 = 80 - 2p_2 + p_1$. Kos pengualaran produk 1 dan produk 2 ialah masing-masingnya RM25 dan RM72. Berapakah unit setiap produk yang harus dihasilkan untuk memaksimumkan keuntungan? Petunjuk: Pengaturcaraan tak linear dan matriks Hessian.

[25 markah]

7. Sesebuah syarikat mempunyai dua kilang yang mengeluarkan produk yang sama. Kilang A menghasilkan x unit produk tersebut pada satu kos $2x^2 + 50,000$ ringgit, dan kilang B boleh menghasilkan y unit pada kos $y^2 + 40,000$ ringgit. Jika permintaan sebanyak 1200 unit perlu dipenuhi, bagaimanakah sepatutnya pengeluaran diagihkan antara dua kilang tersebut supaya jumlah kos pengeluaran dapat diminimumkan? Tambahan pula, apakah kos minimum? Petunjuk: Gunakan kaedah Lagrange untuk pengoptimuman.

[25 markah]

8. Gunakan syarat-syarat Kuhn-Tucker bagi mencari penyelesaian optimum terhadap masalah pengaturcaraan tak linear berikut:

Minimumkan $z = x_1 - 3x_1^2 + x_2 - 5x_2^2$
terhadap $x_1 + x_2 \leq 7$
 $x_1, x_2 \geq 0$

[25 markah]