
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2010/2011 Academic Session

April/May 2011

MGM 501 – Analysis
[Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

[Arahan: Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) (i) State the definition of Supremum and Infimum.
(ii) Show that if the supremum and the infimum exist, they must be unique.

- (b) Let $A = \left\{ \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$.
 - (i) Find the infimum and the supremum of the set A .
 - (ii) Using the Archimedean principle show that there is no such number, $m < 1$ as an upper bound of the set A .

- (c) (i) State the Completeness Axiom.
(ii) Let $T = -x : x \in S = -S$, where the set S is a non-empty set which is bounded below, then show that the set S has the infimum.

- (d) (i) Define the absolute value of a real number a , which is denoted as $|a|$.
(ii) Determine all solutions for $|x+12| + |x-5| = 15$.

- (e) Show that \sqrt{p} is an irrational number for all prime number p .

- (f) Let $f : X \longrightarrow Y$ with $A, B \subset X$. Show that $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

[100 marks]

2. (a) State the definition of a convergent sequence. Using this definition show that the sequence $\left\{ \frac{2+5n}{8+11n} \right\}$ converges.

- (b) State the definition of Cauchy sequence. Using this definition show that the sequence $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$ is a Cauchy sequence.

- (c) State the definition of a limit of a function. Then, estimate $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+2}{x^2-8}$ and verify your estimate using the definition.

- (d) Given $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ is a function which is continuous at all points on \mathbb{R} . Using a definition of the continuous function, verify this.

- (e) Given a function $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Show that the function f is uniformly continuous on $[0, 4]$.

[100 marks]

1. (a) (i) Takrifkan Supremum dan Infimum.
(ii) Tunjukkan jika supremum dan infimum wujud, maka ianya adalah unik.
- (b) Biarkan $A = \left\{ \frac{n}{n+1}; n \in N \right\}$.
- (i) Dapatkan infimum dan supremum bagi set A.
(ii) Gunakan prinsip Archimedean untuk menunjukkan bahawa tidak wujud suatu nombor, $m < 1$ yang boleh menjadi batas atas set A.
- (c) (i) Nyatakan Aksiom Kelengkapan.
(ii) Biarkan $T = -x : x \in S = -S$, yang mana S adalah set tak kosong yang di batasi dari bawah, Justeru tunjukkan bahawa set S mempunyai infimum.
- (d) (i) Takrifkan nombor mutlak a, iaitu $|a|$.
(ii) Berikan semua penyelesaian bagi $|x+12| + |x-5| = 15$.
- (e) Tunjukkan bahawa \sqrt{p} adalah nombor bukan nisbah untuk semua nombor perdana p.
- (f) Biarkan $f : X \longrightarrow Y$ dengan $A, B \subset X$. Tunjukkan bahawa $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

[100 markah]

2. (a) Nyatakan takrifan bagi jujukan yang menumpu. Gunakan takrifan ini untuk menunjukkan bahawa jujukan $\left\{ \frac{2+5n}{8+11n} \right\}$ menumpu.
- (b) Nyatakan takrifan jujukan Cauchy. Gunakan takrifan ini untuk menunjukkan jujukan $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$ adalah jujukan Cauchy.
- (c) Nyatakan takrifan had suatu fungsi. Seterusnya anggarkan $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+2}{x^2-8}$ dan tentusahkan anggaran menggunakan takrifan yang diberikan tersebut.
- (d) Diberikan $f : R \rightarrow R, f(x) = x^3 + 1$ satu fungsi yang selanjar pada semua nombor nyata, R. Menggunakan takrifan fungsi selanjar, tentusahkan kenyataan ini.
- (e) Diberi fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Tunjukkan bahawa fungsi ini adalah selanjar secara seragam pada $[0, 4]$.

[100 markah]

3. (a) State the Intermediate Value Theorem, then show that $x^4 + x^3 - 4x + 1 = 0$ has a root in $(0, 1)$.
- (b) Given $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 10$. Using the definition of the derivative, determine the tangent line to the graph of f at the point $(5, f(5))$.
- (c) Show that if a function f is differentiable at the point c , then this implies f is continuous at c .
- (d) State the Mean Value Theorem. Verify the Mean Value Theorem for $f(x) = x^3 - 3x^2$ on the interval $[1, 4]$.
- (e) Let $f(x) = x^2$ on $[0, 1]$. Find the upper sum, $U(P, f)$ and the lower sum, $L(P, f)$ with respect to a partition P of n equally spaced subintervals of $[0, 1]$.
Next, use the definition to show that $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

[100 markah]

3. (a) Nyatakan Teorem Nilai Pertengahan $x^4 + x^3 - 4x + 1 = 0$ mempunyai "root" pada $0,1$.
- (b) Diberikan $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 10$. Menggunakan takrifan terbitan, tentukan garis tangen bagi graf f pada titik $(5, f(5))$.
- (c) Tunjukkan bahawa jika fungsi f adalah terbezakan pada titik c , maka f adalah satu fungsi yang selanjar pada titik c .
- (d) Nyatakan Teorem Nilai Min. Tentusahkan Teorem Nilai Min bagi $f(x) = x^3 - 3x^2$ pada selang $[1, 4]$.
- (e) Biarkan $f(x) = x^2$ pada $[0, 1]$. Dapatkan hasil tambah atas, $U(P, f)$ dan hasil tambah bawah, $L(P, f)$ berdasarkan partisi P bagi sub selang $[0, 1]$ yang di cincang n partisi yang sama. Seterusnya, gunakan takrifan untuk menunjukkan bahawa $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

[100 markah]