UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2010/2011 Academic Session

April/May 2011

MSG 228 – Introduction to Modelling
[Pengenalan Pemodelan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. The table below lists the estimated number g of genes and the estimated number z of cell types for various organisms.

Organism	Number of genes, g	Number of cell types, z
Humans	600,000	250
Annelid worms	200,000	60
Jellyfish	60,000	25
Sponges	10,000	12
Yeasts	2,500	5

(a) Fit a function of the form $\ln z = c_0 + c_1 \ln g$ to the data points $\ln g_i, \ln z_i$, using least squares.

(b) Use your answer in part (a) to fit a power function $z = kg^n$ to the data points g_i, z_i.

(c) Using the theory of self-regulatory systems, scientists developed a model that predicts that z is a square-root function of g, that is, $z = k\sqrt{g}$, for some constant k. Is your answer in part (b) reasonably close to this form?

[100 marks]

2. A population of squirrels is growing at a rate 5% per month. Let w_n be the number of squirrels n months from now and suppose there are currently 350.

(a) Write a difference equation which describes how the population changes from month to month.

(b) Solve the difference equation of part (a). If the population growth continues at the rate 5%, how many will there be 15 months from now?

(c) Plot w_n versus n for $n = 0,1,2,\ldots,100$.

(d) How many months will it take for the population to double?

(e) Find $\lim_{n\to\infty} w_n$. What does this say about the long term size of the population?

[100 marks]

3. Consider the model for population growth below

$$\frac{dN}{dt} = -r\left(1 - \frac{N}{T}\right)N .$$

Where r and T are positive constants.

(a) Sketch the graph of dN/dt versus N, find the critical points and determine whether each is stable or unstable.

(b) For $0 \le N \le T$ determine where the graph of N versus t is concave up and where it is concave down. Does the graph has a point of inflection?

(c) Without solving the equation above explicitly, sketch the graph of N versus t

[100 marks]

1. *Jadual di bawah menyenaraikan anggaran bilangan gen, g dan anggaran bilangan jenis sel, z bagi pelbagai organisma.*

Organisma	*Bilangan gen, g*	*Bilangan jenis sel, z*
Manusia	*600,000*	*250*
Cacing Annelid	*200,000*	*60*
Obor-obor	*60,000*	*25*
Span	*10,000*	*12*
Ragi	*2,500*	*5*

(a) *Suaikan suatu fungsi dalam bentuk $\ln z = c_0 + c_1 \ln g$ kepada titik data $(\ln g_i, \ln z_i)$, menggunakan kuasa dua terkecil.*

(b) *Gunakan jawapan anda bagi bahagian (a) untuk menyesuaikan fungsi kuasa $z = kg^n$ kepada titik data (g_i, z_i).*

(c) *Menggunakan teori sistem swakawalanturan, saintis membangunkan suatu model yang menjangkakan z ialah fungsi punca kuasa terhadap g, iaitu, $z = k\sqrt{g}$, bagi nilai malar tertentu k. Adakah jawapan anda bagi bahagian (b) hampir secara munasabah kepada bentuk ini?*

[100 markah]

2. *Suatu populasi tupai bertambah pada kadar 5% sebulan. Biar w_n menjadi bilangan tupai n bulan dari sekarang, dan andaikan bilangan terkini ialah 350.*

(a) *Tuliskan persamaan beza yang menghuraikan bagaimana populasi ini berubah dari bulan ke bulan.*

(b) *Selesaikan persamaan beza di bahagian (a). Jika pertumbuhan populasi berterusan pada kadar 5%, berapakah bilangan yang ada 15 bulan daripada sekarang?*

(c) *Plot w_n terhadap n untuk $n = 0, 1, 2, \ldots, 100$.*

(d) *Berapa bulankah masa yang diambil untuk populasi ini bertambah dua kali ganda ?*

(e) *Cari $\lim_{n\to\infty} w_n$. Apakah yang dinyatakan tentang saiz jangka panjang populasi ini?*

[100 markah]

3. *Pertimbangkan model pertumbuhan populasi di bawah,*

$$\frac{dN}{dt} = -r\left(1 - \frac{N}{T}\right)N .$$

di mana r dan T pemalar positif.

(a) *Lakarkan graf dN/dt lawan N, cari titik-titik genting dan tentukan samada setiap satunya stabil atau tidak stabil.*

(b) *Untuk $0 \le N \le T$, tentukan di mana graf N lawan t cekung ke atas dan di mana ia cekung ke bawah. Adakah graf ini mempunyai titik lengkuk balas?*

(c) *Tanpa menyelesaikan persamaan di atas secara eksplisit, lakarkan graf N lawan t*

[100 markah]

4. Consider the discrete time SIS model for epidemics

$$I_{t+1} = I_t - \kappa I_t + \alpha\gamma s_t I_t \qquad \text{(A)}$$
$$S_{t+1} = S_t + \kappa I_t - \alpha\gamma s_t I_t \qquad \text{(B)}$$

where

I_t - the number of infected individuals at period t

S_t - the number of susceptible individuals at period t

κ - the percentage of the population that recovers from the disease during each period

γ - the number of times each infected person is in contact with a non-infected person

α - the percentage of contacts that results in an infection.

(a) Explain equations (A) and (B) in words.

(b) Express the model in terms of the variables $s_t = \dfrac{S_t}{N}$ and $i_t = \dfrac{I_t}{N}$, where N is the number of individuals in the population.

(i) Under what circumstances can we assume N to be constant?

(ii) Use the model to determine when the number of infection increases and when infection decreases.

(c) Compute the steady state values of s_t and i_t.

(d) Suppose that $i_0 = 0.25$, $\kappa = 0.25$ and $\alpha\gamma = 0.5$.

(i) What is the fraction of susceptible individuals in the next period (i.e. period $t = 1$)?

(ii) What is the steady state level of infections in the population?

(iii) Suppose that we lengthen the time it takes to recover from the disease. Will the steady state fraction of susceptible individuals increase or decrease?

[100 marks]

4. *Pertimbangkan model SIS masa diskret untuk epidemik,*

$$I_{t+1} = I_t - \kappa I_t + \alpha\gamma s_t I_t \qquad \text{(A)}$$
$$S_{t+1} = S_t + \kappa I_t - \alpha\gamma s_t I_t \qquad \text{(B)}$$

di mana

- I_t - *bilangan individu yang sedang dijangkiti pada tempoh* t
- S_t - *bilangan individu yang terdedah kepada jangkitan pada tempoh* t
- κ - *peratusan populasi yang sembuh daripada penyakit tersebut dalam sesuatu tempoh*
- γ - *kekerapan seseorang individu yang sedang dijangkiti bertembung dengan individu yang belum dijangkiti.*
- α - *peratusan pertembungan yang membawa kepada jangkitan.*

(a) *Terangkan persamaan (A) dan (B) dengan perkataan.*

(b) *Ungkapkan model ini menggunakan pembolehubah-pembolehubah* $s_t = \dfrac{S_t}{N}$ *dan* $i_t = \dfrac{I_t}{N}$, *di mana* N *ialah bilangan individu dalam populasi tersebut.*

(i) *Di bawah keadaan apakah kita boleh mengandaikan nilai* N *malar?*

(ii) *Gunakan model ini untuk menentukan bila jumlah jangkitan bertambah dan bila ia berkurangan.*

(c) *Kira nilai keadaan mantap* s_t *dan* i_t.

(d) *Andaikan* $i_0 = 0.25$, $\kappa = 0.25$ *dan* $\alpha\gamma = 0.5$.

(i) *Apakah pecahan daripada individu yang terdedah kepada jangkitan pada tempoh seterusnya (iaitu tempoh 1)?*

(ii) *Apakah aras keadaan mantap jangkitan dalam populasi ini?*

(iii) *Katakan kita memanjangkan tempoh yang diambil untuk sembuh daripada penyakit tersebut. Adakah pecahan individu yang terdedah kepada jangkitan akan bertambah atau berkurang?*

[100 markah]

- ooo O ooo -