
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2010/2011 Academic Session

November 2010

MGM 562 – Probability Theory
[Teori Kebarangkalian]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all ten** [10] questions.

[Arahan: Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Consider the following questions:-

- (a) A survey of 1000 people determines that 80% like walking and 60% like biking, and all like at least one of the two activities. How many people in the survey like biking but not walking?
- (b) A test for a disease correctly diagnoses a diseased person as having the disease with probability 0.85. The test incorrectly diagnoses someone without the disease as having the disease with a probability of 0.10. If 1% of the people in a population have the disease, what is the chance that a person from this population who tests positive for the disease actually has the disease?

[10 marks]

2. Consider the following questions:-

- (a) A fair coin is tossed. If head occurs, 1 fair die is rolled; if a tail occurs, 2 fair dice are rolled. If Y is the total number on the die or dice, then what is $\Pr Y = 6$?
- (b) There are 97 men and 3 women in an organization. A committee of 5 people is chosen at random, and one of these 5 people is randomly designated as chairperson. What is the probability that the committee includes all 3 women and has one of the women as chairperson? [Answering in factorial form is accepted, e.g.:- $\frac{a!b!}{c!}$]

[10 marks]

3. By using Taylor's Series expansion, i.e.

$$g(x) = \frac{g(x_0)}{0!} (x-x_0)^0 + \frac{g'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{g''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \dots$$

expand $f(x) = e^x$. For a certain discrete random variable with the non-negative integers, the probability function satisfies the relationships

$$\Pr K = 0 = \Pr K = 1 \quad \text{and} \quad \Pr K = k + 1 = \frac{1}{k} \Pr K = k \quad \text{for } k = 1, 2, 3, \dots$$

Find $\Pr K = 0$. [Hint: use Taylor series to derive $f(a) = e^a$ and set $a_0 = 0$].

[10 marks]

1. Pertimbangkan soalan-soalan berikut:-

- (a) Suatu kajian daripada 1000 orang mendapati 80% minat berjalan dan 60% minat berbasikal, manakala semuanya minat sekurang-kurangnya salah satu daripada dua aktiviti tersebut. Berapa orangkah di dalam tinjauan ini minat berbasikal tetapi tidak minat berjalan?
- (b) Ujian terhadap suatu penyakit mendiagnosis seseorang yang berpenyakit secara benar, mempunyai kebarangkalian 0.85. Ujian tersebut pula mendiagnosis seseorang yang tidak berpenyakit secara tidak benar, dengan kebarangkalian 0.10. Jika terdapat 1% daripada populasi mempunyai penyakit, apakah kebarangkalian seseorang yang dipilih daripada populasi itu yang diuji positif penyakit itu sebenarnya mempunyai penyakit tersebut?

[10 markah]

2. Pertimbangkan soalan-soalan berikut:-

- (a) Suatu duit syiling yang adil permukaannya telah dilambungkan. Jika muncul "kepala", satu dadu yang adil permukaannya dibaling, jika "ekor" muncul, dua dadu pula dibaling. Jika Y adalah jumlah nombor di dalam dadu (dadu-dadu) tersebut, apakah $\Pr Y = 6$?
- (b) Terdapat 97 lelaki dan 3 wanita di dalam suatu organisasi. Suatu jawatankuasa seramai 5 orang telah dipilih secara rawak, dan salah seorang daripada 5 orang tersebut dipilih secara rawak sebagai pengerusi. Apakah kebarangkalian bahawa jawatankuasa mempunyai 3 wanita dan salah seorang daripada wanita-wanita tersebut adalah pengerusi? [Jawapan dalam bentuk faktor sudah memadai, contoh:- $\frac{a!b!}{c!}$]

[10 markah]

3. Dengan menggunakan kembangan Siri Taylor, iaitu

$$g(x) = \frac{g(x_0)}{0!} (x-x_0)^0 + \frac{g'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{g''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \dots$$

kembangkan $f(x) = e^x$. Bagi sesuatu pemboleh ubah rawak diskret yang berinteger tidak negatif, fungsi kebarangkalian memenuhi kaitan-kaitan berikut:-

$\Pr K = 0 = \Pr K = 1$ dan $\Pr K = k + 1 = \frac{1}{k} \Pr K = k$ bagi $k = 1, 2, 3, \dots$. Cari

$\Pr K = 0$. [Petunjuk: guna kembangan Siri Taylor bagi mencari $f'(a) = e^a$ dan jadikan $a_0 = 0$].

[10 markah]

4. Consider the following questions:-

(a) Let X have the density function $f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}$ for $0 < x < \theta$, and $f(x) = 0$, otherwise. If $\Pr(X > 1) = \frac{7}{8}$, find the value of θ .

(b) If X has a continuous uniform distribution on the interval from 0 to 10, what is $\Pr\left(X + \frac{10}{X} > 7\right)$?

[10 marks]

5. Consider the following questions:-

(a) Let X have the density function $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{k^2} & 0 < x < k \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$. For what value of k is the variance of X equal to 2?

(b) Let X be a random variable with moment generating function $M(t) = \left(\frac{2 + e^t}{3}\right)^9$ for $-\infty < t < \infty$. Find the variance of X .

[10 marks]

6. Consider the questions below:-

(a) When a questionnaire is sent, 50% of the recipients respond immediately. Of those who do not respond immediately, 40% respond when a follow-up letter is sent. If the questionnaire is sent to 4 persons and a follow-up letter is sent to any of the 4 who do not respond immediately, what is the probability that at least 3 never respond?

(b) The random variable X has an exponential distribution with mean $1/b$. It is found that $M_X(-b^2) = 0.2$. Find b .

[10 marks]

7. Consider the following questions:-

(a) If X has a normal distribution with mean 1 and variance 4, find $\Pr(X^2 - 2X \leq 8)$

(b) Let X be a random variable with a continuous uniform distribution with the interval $[1, \alpha]$, where $\alpha > 1$. If $E(X) = 6\text{Var}(X)$, what is the value of α ?

[10 marks]

4. Pertimbangkan soal-soal berikut:-

(a) Biarkan X mempunyai fungsi taburan $f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}$ untuk $0 < x < \theta$, dan $f(x) = 0$, selainnya. Jika $\Pr(X > 1) = \frac{7}{8}$, cari nilai θ .

(b) Jika X mempunyai taburan seragam yang selanjut dalam selang dari 0 hingga 10, apakah $\Pr\left(X + \frac{10}{X} > 7\right)$?

[10 markah]

5. Pertimbangkan soal-soal berikut:-

(a) Biarkan X mempunyai fungsi taburan $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{k^2} & 0 < x < k \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$. Apakah nilai k supaya varians X bersamaan 2?

(b) Biarkan X menjadi suatu pemboleh ubah dengan fungsi penjana momen $M(t) = \left(\frac{2 + e^t}{3}\right)^9$ bagi $-\infty < t < \infty$. Dapatkan varians bagi X .

[10 markah]

6. Pertimbangkan soal-soal di bawah:-

(a) Apabila soal maklum balas dihantar, 50% daripada penerima memberi respon dengan segera. Daripada mereka yang tidak menjawab dengan segera, 40% memberi respon apabila dihantar surat susulan. Jika soal itu dihantar kepada 4 orang dan surat susulan dihantar kepada sesiapa yang tidak membuat respon dengan segera, apakah kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya 3 daripada mereka tidak memberi respon?

(b) Suatu pemboleh ubah rawak X mempunyai taburan eksponen dengan min $1/b$. Didapati bahawa $M_X(-b^2) = 0.2$. Cari b .

[10 markah]

7. Pertimbangkan soal-soal berikut:-

(a) Jika X mempunyai taburan normal dengan min 1 dan varians 4, dapatkan $\Pr(X^2 - 2X \leq 8)$.

(b) Biarkan X menjadi pemboleh ubah rawak seragam selanjut pada selang $1, \alpha$ yang mana $\alpha > 1$. Jika $E(X) = 6\text{Var}(X)$, apakah nilai α ?

[10 markah]

8. Consider the following questions:-

- (a) The probability that a particular machine breaks down in any day is 0.2 and is independent of the breakdowns of any other day. The machine can breakdown only once per day. Calculate the probability that the machine breaks down two or more times in ten days.
- (b) Let X be a Poisson random variable with mean λ . If $\Pr X = 1 | X \leq 1 = 0.8$, what is the value of λ ?

[10 marks]

9. Consider the following questions:-

- (a) Given $E X | Y = y = 3y$ and $Var X | Y = y = 2$ where Y has an exponential distribution with a mean of $\frac{1}{3}$. Find $Var X$.
- (b) Let X and Y be discrete random variables with joint probability function $f_{x,y}$ given by the following table:

			<u>X</u>		
		2	3	4	5
	0	0.05	0.05	0.15	0.05
<u>Y</u>	1	0.40	0	0	0
	2	0.05	0.15	0.10	0

For this joint distribution, calculate $Cov X, Y$. Then, find $Var X + Y$.

[10 marks]

10. Consider the following problems:-

- (a) Show that the exponential random variable, X , with probability density function

$$f_x = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0.$$

has moment generating function

$$\frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$$

- (b) The random variable Z has probability density function

$$f_z = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} e^{-\alpha z} & z \geq 0 \\ \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} e^{\beta z} & z \leq 0 \end{cases}; \alpha > 0 \text{ and } \beta > 0$$

By using the above results or otherwise, show that the moment generating function of Z is

$$\frac{\alpha\beta}{\beta + t} \frac{1}{\alpha - t}; -\beta < t < \alpha$$

Then, derive $E Z$ and $Var Z$ from this moment generating function.

[10 marks]

8. Pertimbangkan soalan-soalan berikut:-

- (a) Kebarangkalian sebuah mesin itu rosak pada sebarang hari adalah 0.2 dan kerosakkannya tidak bersandar antara hari. Mesin tersebut hanya boleh rosak sekali sehari. Kira kebarangkalian mesin rosak dua kali atau lebih dalam masa sepuluh hari.
- (b) Biarkan X suatu pemboleh ubah rawak Poisson dengan min λ . Jika $\Pr X = 1 | X \leq 1 = 0.8$, apakah nilai λ ?

[10 markah]

9. Pertimbangkan soalan-soalan berikut:-

- (a) Diberi $E X | Y = y = 3y$ dan $\text{Var } X | Y = y = 2$ yang mana Y adalah taburan eksponen dengan min $\frac{1}{3}$. Cari $\text{Var } X$.
- (b) Biarkan X dan Y adalah pemboleh – pemboleh ubah rawak diskret dengan fungsi kebarangkalian tercantum $f_{x,y}$ diberi seperti jadual di bawah:

		<u>X</u>				
		2	3	4	5	
<u>Y</u>	0	0.05	0.05	0.15	0.05	
	1	0.40	0	0	0	
	2	0.05	0.15	0.10	0	

Untuk taburan gabungan di atas, kira $\text{Cov } X, Y$. Kemudian, cari $\text{Var } X + Y$.

[10 markah]

10. Pertimbangkan masalah-masalah berikut:

- (a) Tunjukkan bahawa taburan rawak eksponen, X , dengan fungsi taburan kebarangkalian

$$f_x = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0.$$

mempunyai fungsi penjana momen

$$\frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$$

- (b) Pemboleh ubah rawak Z mempunyai fungsi taburan kebarangkalian

$$f_z = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} e^{-\alpha z} & z \geq 0 \\ \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} e^{\beta z} & z \leq 0 \end{cases}; \alpha > 0 \text{ dan } \beta > 0$$

Dengan menggunakan keputusan di atas, atau dengan cara lain, tunjukkan bahawa fungsi penjana momen bagi Z adalah

$$\frac{\alpha\beta}{\beta + t} \frac{1}{\alpha - t}; -\beta < t < \alpha$$

Seterusnya, cari $E Z$ dan $\text{Var } Z$ daripada fungsi penjana momen ini.

[10 markah]