
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2010/2011 Academic Session

November 2010

MSG 327 – Mathematical Modelling
[Matematik Pemodelan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) A 50 kg of mass is shot from a cannon straight up with an initial velocity of 10 m/s off a bridge that is 100 meters above the ground. If the air resistance is given by $5v$, determine the velocity of the mass when it hits the ground.

[10 marks]

- (b) A tank contains 150 gallons of brine made by dissolving 75 lb of salt in water. Salt water containing 1 lb of salt per gal runs in at the rate of 3 gal/min and the mixture kept uniform by stirring, runs out at the rate of 4 gal/min. Find the amount of salt in the tank at the end of 1 hour.

[10 marks]

2. (a) A 3 kg object is attached to spring and will stretch the spring 392 mm by itself. There is no damping in the system and a forcing function of the form $F \sin \omega t = 10 \cos \omega t$ is attached to the object and the system will experience resonance. If the object is initially displaced 20 cm downward from its equilibrium position and given a velocity of 10 cm/s upward, find the displacement at any time t .

[10 marks]

- (b) A man rows a boat with constant velocity ' v ' across a stream of width ' a ' always heading directly for the opposite bank. If the velocity of the stream varies directly as the squares of product of the distances from the two banks, find the equation to the path of the man. How far downstream of his starting point does he land?

[10 marks]

3. (a) A cylindrical tank 10 ft long and 6 ft in diameter is placed with its axis in the horizontal positions. Water, initially filling the tank, flows through a circular orifice of diameter 2 inch located in the bottom of the tank. How much time will be required for all the water to escape?

[10 marks]

- (b) A cantilever beam of length $2l$, with uniform load w per unit length has a concentrated load W at the free end. Taking the origin at the fixed end, find the equation of the elastic curve of the beam. Determine the maximum deflection and the value of the clamping couple at the fixed end.

[10 marks]

1. (a) Jisim 50 kg ditembak secara mendatar daripada sebuah meriam atas jambatan yang berada 100 meter di atas dataran dengan kelajuan awal 10 m/saat. Jika rintangan udara diberi oleh $5v$, tentukan kelajuan jisim ketika sampai dataran.

[10 markah]

- (b) Sebuah tangki mengandungi 150 gelen air garam hasil daripada melarutkan 75 paun garam dalam air. Air yang mengandungi satu paun/gelen garam masuk ke dalam tangki pada kadar 3 gelen/minit dan campuran berkeadaan seragam dengan mengacau; air keluar pada kadar 4 gelen/min. Cari jumlah garam dalam tangki selepas 1 jam.

[10 markah]

2. (a) Suatu objek 3 kg dimelekatkan pada satu spring dan akan meregangkannya 392 mm dengan sendirinya. Tidak terdapat lembapan dalam sistem dan satu fungsi paksa berbentuk $F \sin \omega t = 10 \cos \omega t$ dilekatkan pada objek dan sistem akan mengalami resonans. Jika objek pada awalnya disesar 20 cm ke bawah dari kedudukan keseimbangan dan terdapat kelajuan 10 cm/saat ke atas, dapatkan sesaran pada sebarang masa t .

[10 markah]

- (b) Seorang mendayung sebuah sampan dengan halaju malar ' v ', menyeberangi satu terusan lebar ' a '; dan sentiasa mengarah ke tebing seberang. Jika halaju terusan berkadar terus dengan ganda dua jarak dari kedua-dua tebing, dapatkan persamaan lintasan pendayung. Berapa jauh ke hilir dari titik permulaan, sebelum dia sampai ke tebing?

[10 markah]

3. (a) Sebuah tangki silinder panjang 10 kaki dan diameter 6 kaki ditempatkan dengan paksi dalam kedudukan mendatar. Air, pada awalnya memenuhi tangki, mengalir keluar melalui sebuah lubang melingkar dengan diameter 2 inci yang terletak di bahagian bawah tangki. Berapa lamakah sebelum kesemua air keluar tangki?

[10 markah]

- (b) Satu alang jejulur dengan panjang $2l$, dengan beban seragam w per unit panjang, mempunyai beban W pada hujung alang. Mengambil asalan pada hujung tetap, dapatkan persamaan lengkung elastik alang. Tentukan pesongan maksimum dan nilai pengapit gandingan pada hujung tetap.....

[10 markah]

4. (a) A solid body whose temperature is 95°C cools in an atmosphere of constant temperature 23°C at the rate of $k\theta$, (k is a constant) θ being the excess temperature of the body over that of the atmosphere. If after 15 minutes, the temperature of the solid body falls to 70°C , find the temperature after 30 minutes. Also, find the time required to cool down to 45°C .

[10 marks]

- (b) The air in a room with dimension $30\text{ft} \times 20\text{ft} \times 15\text{ft}$ contains 25% carbon dioxide. Find the percentage of carbon dioxide in the room at the end of 1 hour if fresh air with 5% carbon dioxide is admitted at the rate of 30 cubic feet per minute.

[10 marks]

5. (a) The differential equation of a shaft which is whirling with the line of bearings horizontal is given by $EI \frac{d^4 y}{dx^4} - W \frac{\omega}{g} y = W$, where W is the weight of the shaft and ω is the whirling speed. Find the general solution of the above equation. If the shaft is of length $2l$ with the origin at its centre and short bearings at both ends, show that

$$y = \frac{g}{2\omega^2} \left(\frac{\cos ax}{\cos al} + \frac{\cosh ax}{\cosh al} - 2 \right), \text{ where } a^4 = \frac{W\omega^2}{EIg}.$$

Show also that the bending moment at the centre of the shaft is

$$\frac{\sqrt{WgEI}}{2\omega} \sec hal - \sec al.$$

[10 marks]

- (b) A light horizontal strut AB is freely pinned at A and B . It is under the action of equal and opposite compressive forces P at its ends and carries a load W at its centre. Prove that the deflection at the centre is

$$\frac{W}{2P} \left(\frac{1}{n} \tan \left(\frac{nl}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) \text{ where } n^2 = \frac{P}{EI}.$$

Prove also that the maximum bending moment is of magnitude

$$\frac{W}{2n} \tan \left(\frac{n}{2} \right)$$

[10 marks]

4. (a) Satu badan padat dengan suhu tetap 95°C menyejuk pada kadar $k\theta$, (k malar) dalam satu atmosfera dengan suhu tetap 23°C ; θ adalah perbezaan suhu antara badan dan atmosfera. Jika selepas 15 minit, suhu badan padat jatuh ke 70°C , dapatkan suhu selepas 30 minit. Juga, masa yang diperlukan untuk menyejukkan badan 45°C .

[10 markah]

- (b) Udara dalam dengan dimensi 30kaki x 20kaki x 15 kaki mengandungi 25% karbon dioksida. Cari peratusan karbon dioksida dalam ruangan pada akhir 1 jam jika udara segar dengan 5% karbon dioksida dimasukkan pada kadar 30 kaki padu per minit.

[10 markah]

5. (a) Persamaan sebuah poros, yang berputar dengan garis bearing mendatar, diberikan oleh $EI \frac{d^4 y}{dx^4} - W \frac{\omega}{g} y = W$, dengan W berat poros dan ω kelajuan putaran. Cari penyelesaian am untuk persamaan di atas. Jika panjang poros adalah $2l$ dengan asalan di pusatnya dan bearing pendek di kedua-dua penghujung, tunjukkan bahawa

$$y = \frac{g}{2\omega^2} \left(\frac{\cos ax}{\cos al} + \frac{\cosh ax}{\cosh al} - 2 \right) \text{ dengan } a^4 = \frac{W\omega^2}{EIg}. \text{ Tunjukkan juga bahawa momen lentur di tengah poros tersebut adalah } \frac{\sqrt{WgEI}}{2\omega} \sec hal - \sec al.$$

[10 markah]

- (b) Satu topang mendatar AB dipakukan secara bebas pada A dan B . Topang berada bawah tindakan daya-daya tekanan sama dan bertentangan P pada kedua-dua hujungnya; membawa beban W di pertengahanannya. Buktikan bahawa pesongan di tengah adalah

$$\frac{W}{2P} \left(\frac{1}{n} \tan \left(\frac{nl}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) \text{ dengan } n^2 = \frac{P}{EI}.$$

Buktikan juga bahawa momen lentur maksimum adalah bermagnitud

$$\frac{W}{2n} \tan \left(\frac{n}{2} \right).$$

[10 markah]