
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2010/2011 Academic Session

November 2010

MGM 503 – Combinatorics
[Kombinatorik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

In questions 2 and 3, C_n^k is the number of ways of selecting k objects from n objects and $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ is the number of permutations of n objects, $n = n_1 + \dots + n_k$, with n_i objects of the i th type.

1. (a) A computer randomly prints three-digit codes, using the decimal digits, with no repeated digits in any code (as for example, 387, 072, 760). What is the number of different codes that can be printed? What is the minimum number of codes that must be printed in order to guarantee that at least six of the codes are identical?
- (b) How many subsets of a set with 10 elements have
 - (i) fewer than 5 elements?
 - (ii) an odd number of elements?
- (c) How many permutations without repetition of the seven letters a, b, c, d, e, f, g
 - (i) do not have vowels on the ends? (Vowels are a, e)
 - (ii) do not have the vowels next to each other?
- (d) A club with 20 women and 17 men needs to form a committee of size six. How many committees are possible
 - (i) if the committee must have three women and three men?
 - (ii) if the committee must consist of all women or all men?
- (e) How many arrangements of the letters $a, e, i, o, u, x, x, x, x, x, x, x, x, x$ (eight x 's) are there if no two vowels can be consecutive?

[50 marks]

Dalam soalan 2 dan 3, C_n^k ialah jumlah cara memilih k objek dari n objek dan $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ ialah bilangan pilihatur n objek, $n = n_1 + \dots + n_k$, dengan n_i ialah objek jenis i .

1. (a) Sebuah komputer mencetak secara rawak kod tiga-digit, dalam digit perpuluhan, tanpa ulangan digit dalam kod (misalnya, 387, 072, 760). Berapa kod yang berbeza boleh dicetak? Apakah jumlah minimum kod yang harus dicetak untuk menjamin bahawa sekurang-kurangnya enam daripada kod adalah secaman?
 - (b) Berapa subset dari set dengan 10 unsur mempunyai
 - (i) kurang dari 5 unsur?
 - (ii) bilangan ganjil unsur?
 - (c) Berapa pilihatur tanpa ulangan dari tujuh huruf a, b, c, d, e, f, g
 - (i) tidak mempunyai vokal di hujung? (Vokal adalah a dan e)
 - (ii) tidak mempunyai vokal bersebelahan?
 - (d) Sebuah kelab dengan 20 perempuan dan 17 lelaki hendak membentuk satu jawatankuasa bersaiz enam. Berapa jawatankuasa yang mungkin
 - (i) jika jawatankuasa mesti mempunyai tiga perempuan dan tiga lelaki?
 - (ii) jika jawatankuasa harus terdiri daripada semua wanita atau semua orang?
 - (e) Berapa susunan huruf $a, e, i, o, u, x, x, x, x, x, x, x, x, x$ (lapan x) yang ada jika tidak ada dua huruf vokal yang berturut-turut?

[50 markah]

2. (a) Show that the number of ways of dividing n like objects among k persons is C_{n+k-1}^{k-1} . Using this result,
- find the number of ways in which 4 black balls, 4 white balls and 4 blue balls can be placed into six different boxes, if one or more boxes may be left empty?
 - find the number of ways in which three persons can divide among themselves 6 identical apples, 1 orange, 1 plum, 1 lemon, 1 pear, 1 date and 1 banana.
- (b) If n people are seated in a row, show that the number of ways of choosing or selecting k of them without including immediate neighbours, is C_{n-k+1}^k , $n \geq 2k - 1$. If the n people are seated at a round table, show that the number of ways of selecting k of them without including immediate neighbours, is $\frac{n}{(n-k)} C_{n-k}^k$.

[50 marks]

3. (a) Prove that
$$C_{n+1}^{r+1} = \frac{(n+1)}{(r+1)} C_n^r.$$

Then, by using this result, show that
$$\frac{(C_{n+1}^{r+1} - C_n^r) C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2 - C_{n+1}^{r+1} C_{n-1}^{r-1}} = r.$$

- (b) Give a combinatorial proof for each of the following:
- $C_n^k = P(k, n - k)$
 - $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

[50 marks]

4. (a) Find the solution of the recurrence relation $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ with $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$.
- (b) If $G(x)$ is the generating function for $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, describe in terms of $G(x)$,
- the generating function for $a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$
 - the generating function for $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, a_4, \dots$
- (c) Using generating functions, solve the recurrence relation $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ with the initial condition $a_1 = 9$.

[50 marks]

2. (a) Tunjukkan bahawa jumlah cara membahagi n objek serupa di antara k orang ialah C_{n+k-1}^{k-1} . Dengan keputusan ini,
- (i) cari jumlah cara 4 bola hitam, 4 bola putih dan 4 bola biru dapat ditempatkan ke dalam enam kotak yang berbeza, jika satu atau lebih kotak boleh dibiarkan kosong?
- (ii) cari jumlah cara tiga orang dapat membahagi di antara mereka 6 epal serupa, 1 oren, 1 plum, 1 lemon, 1 buah pir, 1 kurma dan 1 pisang.
- (b) Jika n orang duduk sebaris, tunjukkan bahawa jumlah cara untuk memilih k orang daripada mereka tanpa termasuk jiran terdekat, ialah C_{n-k+1}^k , $n \geq 2k - 1$. Jika n orang tersebut duduk di meja bulat, tunjukkan bahawa jumlah cara untuk memilih k orang dari mereka tanpa termasuk jiran terdekat, ialah $\frac{n}{(n-k)} C_{n-k}^k$.

[50 markah]

3. (a) Buktikan bahawa $C_{n+1}^{r+1} = \frac{(n+1)}{(r+1)} C_n^r$.
- Kemudian, dengan menggunakan keputusan ini, tunjukkan bahawa
- $$\frac{(C_{n+1}^{r+1} - C_n^r) C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2 - C_{n+1}^{r+1} C_{n-1}^{r-1}} = r.$$
- (b) Berikan bukti kombinatorik untuk setiap berikut:
- (i) $C_n^k = P(k, n-k)$
- (ii) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

[50 markah]

4. (a) Cari penyelesaian untuk hubungan jadi semula $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ dengan $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$.
- (b) Jika $G(x)$ ialah fungsi penjana untuk $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, huraikan dalam $G(x)$,
- (i) fungsi penjana untuk $a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$
- (ii) fungsi penjana untuk $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, a_4, \dots$
- (c) Dengan menggunakan fungsi penjana, selesaikan hubungan jadi semula $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ dengan syarat awal $a_1 = 9$.

[50 markah]