

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
2010/2011 Academic Session

November 2010

**MSS 317 – Coding Theory**  
**[Teori Pengekodan]**

Duration : 3 hours  
[Masa : 3 jam]

---

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all six** [6] questions.

**Arahan:** Jawab **semua enam** [6] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. Determine whether each of the following statement is true or false. If it is false give a counter example. If it is true, justify your answer.

(a) Let  $S = \{001, 101\}$  be the set of all message words and  $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Then  $C = \{mG \mid m \in S\}$  is a linear code

[20 marks]

(b) The matrix  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  is a generating matrix of a binary code of

length 5 and dimension 3.

[20 marks]

- (c) The maximum likelihood decoding rule enables all codes to correct at least an error pattern of weight  $t$  where  $t \geq 1$ .

[20 marks]

- (d) Every function  $\phi: F_2^k \longrightarrow F_2^n$  is an encoding process of a binary code of length  $n$  and size  $2^k$ .

[20 marks]

- (e) The code  $C = \{000, 110, 011, 101\}$  is a binary cyclic code.

[20 marks]

2. (a) Construct the finite field  $F_8$ .

[40 marks]

- (b) Construct a vector space isomorphism  $\phi$  from  $F_8$  to  $F_2^3$ .

[30 marks]

1. Tentusahkan sama ada kenyataan-kenyataan berikut adalah betul atau salah. Jika salah, berikan satu contoh lawan. Jika betul, justifikasikan jawapan anda.

(a) Biar  $S = 001,101$  , satu set yang mengandungi semua kata mesage dan

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Maka } C = mG \mid m \in S \text{ adalah suatu kod linear.}$$

[20 markah]

(b) Matrik  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ini adalah matrik penjana bagi suatu kod

dedua yang berpanjang 5 dan berdimensi 3.

[20 markah]

(c) Prinsip penyahkodan kemungkinan maxima membolehkan semua kod membetulkan sekurang-kurangnya satu corak ralat yang berberat  $t$ ,  $t \geq 1$ .

[20 markah]

(d) Setiap fungsi  $\phi: F_2^k \longrightarrow F_2^n$  merupakan satu prosess pengkodan bagi suatu kod dedua yang berpanjang  $n$  dan bersaiz  $2^k$ .

[20 markah]

(e) Kod  $C = 000,110,011,101$  ini merupakan suatu kod dedua kitaran.

[20 markah]

2. (a) Bina medan terhingga  $F_8$ .

[40 markah]

(b) Bina suatu isomorfisma ruang vektor  $\phi$  dari  $F_8$  ke  $F_2^3$ .

[30 markah]

- (c) Let  $F_8^* = \langle \alpha \rangle$ . Show that the matrix  $H = \begin{bmatrix} \alpha \phi \\ \alpha^2 \phi \\ \alpha^3 \phi \\ \alpha^4 \phi \\ \alpha^5 \phi \\ \alpha^6 \phi \\ \alpha^7 \phi \end{bmatrix}$  having all rows as the

image of the  $\phi$  constructed in part b) gives a  $(7,4,3)$ -Hamming code.

[30 marks]

3. (a) Show that  $x^3 + x + 1$  is an irreducible factor of  $x^7 + 1$  over  $F_2$ .

[20 marks]

- (b) Factor  $x^7 + 1$  completely into 3 irreducible factors over  $F_2$ .

[30 marks]

- (c) Give all the binary cyclic codes of length 7 together with their respective generator polynomial and dimension as given in the following table:

All cyclic codes of length 7 over $F_2$	Generator polynomials	Dimension
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

[50 marks]

(c) Biar  $F_8^* = \langle \alpha \rangle$ . Tunjukkan matrik  $H = \begin{bmatrix} \alpha \phi \\ \alpha^2 \phi \\ \alpha^3 \phi \\ \alpha^4 \phi \\ \alpha^5 \phi \\ \alpha^6 \phi \\ \alpha^7 \phi \end{bmatrix}$  ini (semua barisnya

merupakan image kepada isomorfisma  $\phi$  yang dibina di bahagian b)) akan memberikan suatu kod Hamming- 7,4,3 .

[30 markah]

3. (a) Tunjukkan  $x^3 + x + 1$  adalah suatu faktor takterturun bagi  $x^7 + 1$  atas  $F_2$ .

[20 markah]

(b) Faktorkan  $x^7 + 1$  sepenuhnya menjadi hasil darab 3 faktor takterturun atas  $F_2$ .

[30 markah]

(c) Berikan semua kod dedua kitaran yang berpanjang 7 bersama-sama dengan polinomial penjana dan dimensi masing-masing seperti dalam jadual berikut:

Semua kod dedua kitaran yang berpanjang 7	Polinomial Penjana	Dimensi
⋮	⋮	⋮

[50 markah]

4. Let  $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  be a generating matrix of a binary code  $C$ .

(a) Find another generating matrix of  $C$  in reduced row echelon form.

[30 marks]

(b) Find a parity check matrix of  $C$ . Justify your answer.

[40 marks]

(c) Give the length, dimension and distance of  $C$  by using the parity check matrix found in part b).

[30 marks]

5. Let  $n = 4$  and  $d = 2$ .

(a) Using a suitable bound, show that  $A_2(n, d) \leq 8$ .

[40 marks]

(b) By constructing a related optimal code, show that  $A_2(n, d) = 8$ .

[60 marks]

6. (a) Construct a 2 errors correcting binary code with length 10.

[40 marks]

(b) Give a decoding algorithm of the code constructed in part a). You need to justify how your decoding algorithm can make the code become a 2 errors correcting code.

[60 marks]

4. Biar  $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  merupakan matrik penjana bagi suatu kod dedua

C.

(a) Carikan satu matrik penjana yang lain bagi C dalam bentuk echelon baris terturun.

[30 markah]

(b) Carikan satu matrik penyamakan pariti bagi C. Justifikasikan jawapan anda.

[40 markah]

(c) Berikan panjang, dimensi dan jarak minimal kod C dengan menggunakan matrik penyamakan pariti yang didapati di bahagian b).

[30 markah]

5. Biar  $n = 4$  dan  $d = 2$ .

(a) Dengan mengguna suatu had yang bersesuaian, tunjukkan  $A_2(n, d) \leq 8$ .

[40 markah]

(b) Dengan membina suatu kod optimal yang berkaitan, tunjukkan  $A_2(n, d) = 8$ .

[60 markah]

6. (a) Binakan suatu kod dedua berpanjang 10 yang merupakan kod pembetul 2 ralat.

[40 markah]

(b) Berikan satu algoritma penyahkodan bagi kod yang dibina di bahagian a). Anda perlu menjustifikasikan bagaimana algoritma penyahkodan anda dapat membantu kod tersebut menjadi satu kod pembetul 2 ralat.

[60 markah]