

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
2010/2011 Academic Session

November 2010

**MAA 111 – Algebra for Science Students**  
***[Aljabar untuk Pelajar Sains]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all eight** [8] questions.

**Arahan:** Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. Give an example of three  $2 \times 2$  matrices,  $A, B$ , and  $C$  such that  $AB = AC$  but  $B \neq C$  and  $A \neq 0$ .

[9 marks]

2. If  $A$  is a nonsingular matrix whose inverse is  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ , find  $A$ . Then solve the linear system  $A^T x = b$  given  $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

[6 marks]

3. Determine whether the following statements are true or false. Justify your answer.
- Homogeneous linear systems are always consistent.
  - The product of two  $n \times n$  nonsingular matrices is nonsingular.
  - If a homogeneous linear system has more equations than unknowns, then it has a nontrivial solution.
  - If  $A$  is an  $n \times n$  matrix, then  $Ax = 0$  has a nontrivial solution if and only if  $A$  is singular.
  - Every matrix in row echelon form is also in reduced row echelon form.

[10 marks]

4. In the following linear system,

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + z = 3$$

$$x + y + (r^2 - 8)z = r$$

determine all values of  $r$  if the linear system has

- no solution;
- a unique solution;
- infinitely many solutions.

[10 marks]

1. Beri suatu contoh tiga matriks  $2 \times 2$ ,  $A, B$ , dan  $C$  sedemikian  $AB = AC$  tetapi  $B \neq C$  dan  $A \neq 0$ .

[9 markah]

2. Jika  $A$  suatu matriks tak singular yang songsangannya adalah  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ , dapatkan  $A$ . Kemudian, selesaikan sistem linear  $A^T x = b$  diberi  $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

[6 markah]

3. Tentukan sama ada pernyataan berikut adalah benar atau palsu. Tentusahkan jawapan anda.
- Sistem linear yang homogen adalah sentiasa konsisten.
  - Hasil darab bagi dua matriks  $n \times n$  yang tak singular adalah tak singular.
  - Jika suatu sistem linear yang homogen mempunyai lebih persamaan daripada pembolehubah, maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian yang tak remeh.
  - Jika  $A$  suatu matriks  $n \times n$ , maka  $Ax = 0$  mempunyai penyelesaian tak remeh jika dan hanya jika  $A$  adalah singular.
  - Setiap matriks dalam bentuk eselon baris adalah juga dalam bentuk eselon baris terturunkan.

[10 markah]

4. Dalam sistem linear berikut,

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + z = 3$$

$$x + y + (r^2 - 8)z = r$$

tentukan semua nilai  $r$  jika sistem linear mempunyai

- tiada penyelesaian;
- penyelesaian unik;
- penyelesaian tak terhingga banyaknya.

[10 markah]

5. After applying some elementary row operations, the matrix of the linear system  $Ax = b$  is

$$C|d = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- (a) Is  $C$  in reduced row echelon form? Explain.  
 (b) How many solutions are there for  $Ax = b$ .  
 (c) Is  $A$  nonsingular? Explain.  
 (d) Determine all possible solutions for  $Ax = b$ .

[10 marks]

6. Let  $W = (a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}$ .

- (a) Show that  $W$  is a subspace of  $\mathbb{R}^3$ .  
 (b) Find a basis for  $W$ .  
 (c) Use Gram-Schmidt process to obtain an orthonormal basis for  $W$ .

[10 marks]

7. Let  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be defined by  $f(x, y) = (x, -y)$ .

- (a) (i) Find the matrix representation of  $f$  with respect to the usual basis  $S$  for  $\mathbb{R}^2$ .  
 (ii) Find the matrix representation of  $f$  with respect to the ordered basis  $T = (-1, 2), (1, 1)$ .  
 (iii) Verify that the matrices obtained in (i) and (ii) are similar.  
 (iv) Verify that the ranks of the matrices obtained in (i) and (ii) are equal.  
 (b) If  $A$  and  $B$  are similar matrices, then show that  $A^k$  and  $B^k$  are similar for any positive integer  $k$ .

[20 marks]

8. Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Find the eigenvalues and eigenvectors of  $A$ .  
 (b) (i) Find a nonsingular matrix  $P$  such that  $P^{-1}AP$  is diagonal.  
 (ii) Is  $P$  unique? Explain.  
 (c) Compute  $A^{20}$ .  
 (d) Find the eigenvalues for  $A^{-1}$ .

[25 marks]

5. Selepas mengaplikasikan operasi baris permulaan, matriks bagi sistem linear  $Ax = b$  adalah

$$C|d = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- (a) Adakah  $C$  dalam bentuk eselon baris terturunkan? Terangkan.  
 (b) Berapa banyakkah penyelesaian bagi  $Ax = b$ .  
 (c) Adakah  $A$  tak singular? Terangkan.  
 (d) Tentukan kesemua penyelesaian yang mungkin bagi  $Ax = b$ .

[10 markah]

6. Biar  $W = (a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}$ .

- (a) Tunjukkan bahawa  $W$  adalah suatu subruang bagi  $\mathbb{R}^3$ .  
 (b) Dapatkan asas bagi  $W$ .  
 (c) Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mendapatkan asas ortonormal bagi  $W$ .

[10 markah]

7. Biar  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ditakrifkan sebagai  $f(x, y) = (x, -y)$ .

- (a) (i) Dapatkan matriks perwakilan bagi  $f$  terhadap asas piawai  $S$  bagi  $\mathbb{R}^2$ .  
 (ii) Dapatkan matriks perwakilan bagi  $f$  terhadap asas bertertib  $T = (-1, 2), (1, 1)$ .  
 (iii) Tentusahkan bahawa matriks-matriks yang diperolehi dalam (i) dan (ii) adalah serupa.  
 (iv) Tentusahkan bahawa pangkat matriks-matriks yang diperolehi dalam (i) dan (ii) adalah sama.  
 (b) Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks yang serupa, maka tunjukkan bahawa  $A^k$  dan  $B^k$  adalah serupa bagi sebarang integer positif  $k$ .

[20 markah]

8. Biar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen bagi  $A$ .  
 (b) (i) Dapatkan matriks tak singular  $P$  sedemikian  $P^{-1}AP$  adalah pepenjuru.  
 (ii) Adakah  $P$  unik? Terangkan.  
 (c) Hitung  $A^{20}$ .  
 (d) Dapatkan nilai eigen bagi  $A^{-1}$ .

[25 markah]