
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2010/2011

Jun 2011

MAT 263 – Probability Theory
[Teori Kebarangkalian]

Duration : 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all ten** [10] questions.

[Arahan: Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. A box contains b black balls and r red balls. One of the balls is drawn at random, but when it is put back in the box, c additional balls of the same color are put in with it. Now, suppose that we draw another ball. Show that the probability that the first ball drawn was black given that the second ball drawn was red is $\frac{b}{b+r+c}$.

[10 marks]

1. Suatu kotak mengandungi b bola hitam dan r bola merah. Satu daripada bola di dalam kotak dipilih secara rawak, tetapi apabila dimasukkan semula ke dalam kotak itu, sebanyak c bola yang sama warna dengan yang telah diambil tadi, ditambahkan ke dalam kotak tersebut. Sekarang, katakan kita memilih semula sebiji lagi bola. Tunjukkan kebarangkalian bahawa bola pertama yang dipilih adalah hitam bersyaratkan bola kedua yang dipilih adalah merah, ialah $\frac{b}{b+r+c}$.

[10 markah]

2. A fair coin is tossed. If head occurs, 1 fair die is rolled; if a tail occurs, 2 fair dice are rolled. If Y is the total on the die or dice, then what is $\Pr Y = 6$?

[5 marks]

2. Suatu syiling yang sama rata telah dilambungkan. Jika muncul “kepala”, suatu dadu yang sama rata dibaling, jika “ekor” muncul, 2 dadu yang sama rata pula dibaling. Jika Y adalah jumlah nombor pada dadu (dadu-dadu) tersebut, apakah $Kb Y = 6$?

[5 markah]

3. There are 97 men and 3 women in an organization. A committee of 5 people is chosen at random, and one of these 5 is randomly designated as chairperson. What is the probability that the committee includes all 3 women and has one of the women as chairperson? [Answering in factorial form is enough, e.g.:- $\frac{a!b!}{c!}$]

[10 marks]

3. Terdapat 97 lelaki dan 3 wanita di dalam suatu organisasi. Suatu jawatankuasa seramai 5 orang telah dipilih secara rawak, dan salah seorang daripada 5 dipilih secara rawak menjadi pengerusi. Apakah kebarangkalian bahawa jawatankuasa mempunyai 3 wanita dan salah seorang daripada wanita-wanita tersebut adalah pengerusi? [Jawapan dalam bentuk pefaktoran sudah memadai, contoh.:- $\frac{a!b!}{c!}$]

[10 markah]

4. Let the density for the continuous random variable X be given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^x & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Show that $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
- (b) For $-1 < t < 1$, find $M_X(t)$
- (c) Use $M_X(t)$ to find $E(X)$.

[15 marks]

4. Diberi taburan untuk pembolehubah selangar, X adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^x & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Tunjukkan bahawa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
- (b) Bagi $-1 < t < 1$, cari $M_X(t)$
- (c) Gunakan $M_X(t)$, untuk mencari $E(X)$.

[15 markah]

5. When sent a questionnaire, 50% of the recipients respond immediately. Of those who do not respond immediately, 40% respond when sent a follow-up letter. If the questionnaire is sent to 4 persons and a follow-up letter is sent to any of the 4 who do not respond immediately, what is the probability that at least 3 never respond? [Hint: use Binomial distribution to answer the question]

[10 marks]

5. Apabila suatu soalan maklum balas dihantar, 50% daripada penerima memberi respon dengan segera.. Daripada mereka yang tidak menjawab dengan segera, 40% memberi respon apabila dihantar surat peringatan. Jika soalan itu dihantar kepada 4 orang dan surat peringatan dihantar kepada sesiapa antara 4 orang yang tidak membuat respon dengan segera, apakah kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya 3 daripada mereka tidak memberi respon? [Petunjuk: guna taburan Binomial untuk menyelesaikan soalan ini]

[10 markah]

6. The random variable X has an exponential distribution with mean $1/b$. It is found that $M_X - b^2 = 0.2$. Find b .

[5 marks]

6. Suatu pembolehubah rawak X mempunyai taburan eksponen dengan min $1/b$. Didapati bahawa $M_X - b^2 = 0.2$. Cari b .

[5 markah]

7. (a) If X has a normal distribution with mean 1 and variance 4, what is $\Pr X^2 - 2X \leq 8$?

- (b) Let X be a random variable with a continuous uniform distribution on the interval $1, \alpha$ where $\alpha > 1$. If $E X = 6\text{Var } X$, then, find α

[15 marks]

7. (a) Jika X mempunyai taburan normal dengan min 1 dan varians 4, apakah $\text{Kb } X^2 - 2X \leq 8$?

- (b) Biarkan X menjadi pembolehubah rawak seragam selang pada selang $1, \alpha$ yang mana $\alpha > 1$. Jika $E X = 6\text{Var } X$, maka, cari α

[15 markah]

8. The probability that a particular machine breaks down in any day is 0.2 and is independent of the breakdowns of any other day. The machine can breakdown only once per day. Calculate the probability that the machine breaks down two or more times in ten days.

[7 marks]

8. Kebarangkalian sesebuah mesin rosak dalam mana-mana hari adalah 0.2 dan kerosakannya tidak bersandar antara mana-mana hari. Mesin tersebut hanya boleh rosak sekali sehari. Kira kebarangkalian mesin rosak dua kali atau lebih dalam masa sepuluh hari.

[7 markah]

9. Let X be a Poisson random variable with mean λ . If $\Pr X = 1 | X \leq 1 = 0.8$, what is the value of λ ?

[8 marks]

9. Biarkan X suatu pembolehubah rawak Poisson dengan min λ . Jika $\Pr X = 1 | X \leq 1 = 0.8$, apakah nilai λ ?

[8 markah]

10. For discrete numbers of x and y , such that, $1 \leq x \leq y$ and $y = 1, 2, 3$ the probability mass function of joint distribution of X and Y is given as

$$f_{XY}(x, y) = cx$$

- (a) Find c .
 (b) Compute $f_X(x)$ and $f_Y(y)$ respectively for $x = 1, 2, 3$ and $y = 1, 2, 3$
 (c) Find $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $E(Y)$ and $\text{Var}(Y)$

[15 marks]

10. Untuk nombor-nombor diskret x dan y yang mana $1 \leq x \leq y$ dan $y = 1, 2, 3$, fungsi jisim kebarangkalian bagi taburan sut X dan Y dinyatakan seperti berikut

$$f_{XY}(x, y) = cx$$

- (a) Cari c .
 (b) Kira $f_X(x)$ dan $f_Y(y)$ masing-masing untuk $x = 1, 2, 3$ dan $y = 1, 2, 3$
 (c) Cari $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $E(Y)$ dan $\text{Var}(Y)$.

[15 markah]

APPENDIX – FORMULA

$$(i) \quad \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dx} [a(x) b(x)] = a'(x) b(x) + a(x) b'(x)$$

$$(iii) \quad \int a'(x) b(x) dx = a(x) b(x) - \int a(x) b'(x) dx + c$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \text{ then, } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$(v) \quad \frac{d}{dx} \ln [f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ then } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln [f(x)] + c$$

$$(vi) \quad \frac{d}{dx} [f(x)]^n = n f(x)^{n-1} f'(x)$$

(vii) If $X \sim \exp(\lambda)$, then

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

(viii) If $X \sim U(a, b)$

$$(a) \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(b) \quad E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$(c) \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$(d) \quad M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

(ix) If $X \sim \text{bimomial } n, p$, then

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

$$M_X(t) = pe^t + 1 - p$$

(x) If $X \sim \text{Poisson } \lambda$, then

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

$$M_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$$

(xi) If $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right)$$