UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2010/2011

Jun 2011

# MSS 211 – Modern Algebra
## *[Aljaba Moden]*

Duration : 3 hours
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions**: Answer **all five** [5] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua lima** [5] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. Given $A, B$ and $C$ are sets, prove or disprove the following:

$$(A \cap B \cap C) \cup (B - A \cup C) = B - (A - C) \cup (C - A).$$

[10 marks]

*1. Diberikan $A, B$ dan $C$ adalah set, buktikan atau sangkalkan yang berikut:*

$$(A \cap B \cap C) \cup (B - A \cup C) = B - (A - C) \cup (C - A).$$

*[10 markah]*

2. Given the functions $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$ and $g : \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ where $(x)f = \dfrac{2}{2-x} + 4$ and $(x)g = \dfrac{1}{x^2 - 16}$.

   (i) Find $f \circ g$.

   (ii) Show that $f$ is a bijective function whereas $g$ and $f \circ g$ are not.

[25 marks]

*2. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$ dan $g : \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ dengan $(x)f = \dfrac{2}{2-x} + 4$ dan $(x)g = \dfrac{1}{x^2 - 16}$.*

   *(i) Cari $f \circ g$.*

   *(ii) Tunjukkan bahawa $f$ merupakan fungsi bijektif, manakala $g$* dan *$f \circ g$ bukan.*

*[25 markah]*

3. Given the elements $f, g, h, k \in S_n$ with

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (i) Write the value of $n$ and hence determine the value of $|S_n|$.

   (ii) Write each of $f, g, h$ and $k$ as a cycle or product of disjoint cycles.

   (iii) Write each element as a product of transpositions and hence determine which of these belong to $A_n$.

   (iv) Find the order of each element $f, g, h$ and $k$.

   (v) Find the inverse of each element $f, g, h$ and $k$, hence write the elements $g^{23}$ and $h^{48}$.

[25 marks]

3. *Diberikan* $f, g, h, k \in S_n$ *dengan*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) *Tuliskan nilai* $n$ *dan dengan demikian tentukan nilai* $|S_n|$.

(ii) *Tuliskan setiap* $f, g, h$ dan $k$ *sebagai kitar atau hasil darab kitar tak-terkait.*

(iii) *Tuliskan setiap unsur tersebut sebagai hasidarab transposisi dan dengan demikian tentukan yang mana berada dalam* $A_n$.

(iv) *Cari peringkat* $f, g, h$ dan $k$.

(v) *Cari songsangan bagi* $f, g, h$ dan $k$, *dengan demikian tuliskan* $g^{23}$ *dan* $h^{48}$.

*[25 markah]*

4. Given that $\langle G, * \rangle$ is a group where $G = \{e, a, b, c, g, h\}$ and $e$ is its identity element.

(i) Discuss why $x^6 = e \ \forall x \in G$.

(ii) Given that $|g| = 6$, show that $\langle G, * \rangle$ is an Abelian group.

(iii) Given also that $|h| = 6$, $g^2 = a$, $g^3 = b$, obtain the Cayley table for $\langle G, * \rangle$.

(iv) Give an example of a group of order 6 which is not isomorphic to $\langle G, * \rangle$.

[25 marks]

4. *Diberikan bahawa* $\langle G, * \rangle$ *merupakan suatu kumpulan dengan* $G = \{e, a, b, c, g, h\}$ *dan* $e$ *merupakan unsur identitinya.*

(i) *Bincangkan mengapa* $x^6 = e \ \forall x \in G$.

(ii) *Diberi* $|g| = 6$, *buktikan bahawa* $\langle G, * \rangle$ *kumpulan Abelan.*

(iii) *Juga diberi* $|h| = 6$, $g^2 = a$, $g^3 = b$, *dapatkan sifir Cayley bagi* $\langle G, * \rangle$.

(iv) *Berikan satu contoh kumpulan berperingkat 6 yang tak berisomorfik dengan* $\langle G, * \rangle$.

*[25 markah]*

5. List all the elements of the alternating group $A_4$ and show that there exists only one subgroup of order 4 in it. Show that this is a normal subgroup of $A_4$. Is $A_4$ isomorphic to the group $S_3 \times S_2$?

[15 marks]

*5. Senaraikan semua unsur kumpulan selang-seli $A_4$ dan buktikan kewujudan hanya satu subkumpulan berperingkat 4 di dalamnya. Tunjukkan bahawa ini merupakan suatu subkumpulan normal bagi $A_4$. Adakah $A_4$ berisomorfik dengan kumpulan $S_3 \times S_2$?*

*[15 markah]*

**- ooo O ooo -**