UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2011/2012 Academic Session

January 2012

EMH 451/4 – Numerical Methods For Engineers
[Kaedah Berangka Untuk Jurutera]

Duration : 2 hours
Masa : 2 jam

INSTRUCTIONS TO CANDIDATE:
ARAHAN KEPADA CALON:

Please check that this paper contains **SIX (6)** printed pages and **THREE (3)** questions before you begin the examination.
*Sila pastikan bahawa kertas soalan ini mengandungi **ENAM (6)** mukasurat bercetak dan **TIGA (3)** soalan sebelum anda memulakan peperiksaan.*

Answer **ALL** questions.
*Jawab **SEMUA** soalan.*

You may answer all questions in **English** OR **Bahasa Malaysia** OR a combination of both.
*Calon boleh menjawab semua soalan dalam **Bahasa Malaysia** ATAU **Bahasa Inggeris** ATAU kombinasi kedua-duanya.*

Answer to each question must begin from a new page.
Jawapan untuk setiap soalan mestilah dimulakan pada mukasurat yang baru.

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.
Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.

Q1. **Consider a heat conduction problem through the wall as depicted in Figure Q1. One surface of the wall is fixed at 0 °C while the other one at 25 °C. The wall comprises of three different materials described in Table Q1.**

Diberikan masalah pengaliran haba melalui dinding seperti yang tertera di dalam Rajah S1. Satu permukaan dinding ditetapkan pada suhu 0°C manakala permukaan lain pada 25°C. Dinding itu terdiri daripada TIGA (3) bahan berbeza dengan data seperti di dalam Jadual S1.

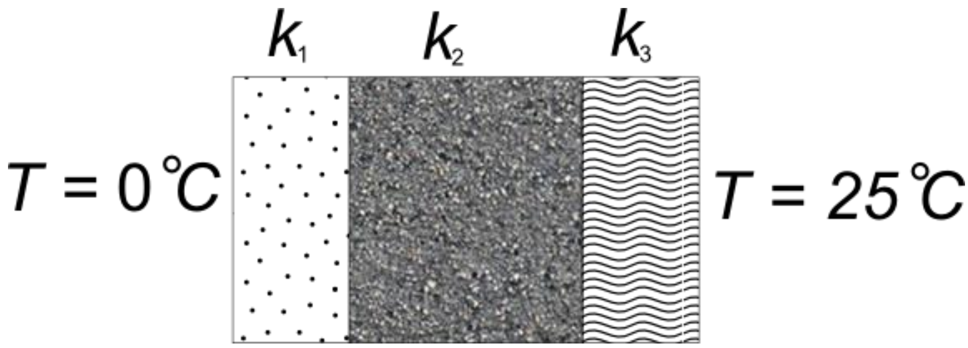

Figure Q1
Rajah S1

	Thermal conductivity k, W/K/m	Depth w, m
Wall 1	$k_1 = 0.2$	**0.1**
Wall 2	$k_2 = 20$	**0.2**
Wall 3	$k_3 = 2$	**0.1**

Table Q1
Jadual S1

(i) **The above problem may be formulated with a 1-D steady-state heat equation. Sketch the 1-D domain and state the strong form of the problem COMPLETELY. (derivation not necessary).**

Masalah di atas boleh dirumuskan dengan persamaan haba keadaan mantap 1-D. Lakarkan domain 1-D dan nyatakan bentuk kuat bagi masalah di atas dengan LENGKAP (terbitan tidak perlu).

(10 marks/*markah***)**

(ii) **Suppose the domain is discretized with THREE (3) finite elements such that each element has a different material property. Sketch the 1-D mesh with appropriate numbering for the nodes and elements.**

Andaikan domain itu dibahagikan kepada TIGA (3) unsur terhingga di mana setiap unsur mempunya ciri bahan yang berbeza. Lakarkan jaring 1-D itu dengan menomborkan unsur dan nod secara sempurna.

(10 marks/*markah***)**

(iii) **Given the basis functions in local coordinate ρ, and $x = (l\rho/2) + (x_i+x_j)/2$, show that the element stiffness matrix $\mathbf{K}^{(e)}$ is**

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k^{(e)}}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

where $k^{(e)}$ is thermal conductivity and l is length of element.

Dengan diberikan fungsi-fungsi basis di dalam koordinat tempatan ρ, *dan* $x = (l\rho/2) + (x_i+x_j)/2$, *tunjukkan matriks pegas unsur* $\mathbf{K}^{(e)}$ *ialah*

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{k^{(e)}}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

di mana $k^{(e)}$ ialah konduksi haba dan l ialah panjang unsur.

(20 marks/*markah*)

(iv) **Assemble the element matrices into a global matrix K. Detailed derivation steps and incorporation of boundary conditions are not necessary.**

Himpunkan matriks-matriks unsur kepada matriks global **K**. *Langkah-langkah terbitan secara terperinci dan pengisian syarat-syarat sempadan adalah tidak perlu.*

(25 marks/*markah*)

(v) **Without any calculations, sketch the plot of the expected FEM solution of the temperature $T(x)$ through the wall according to your mesh above.**

Tanpa sebarang pengiraan, lakarkan plot penyelesain Kaedah Unsur Terhingga bagi suhu T(x) melalui dinding berdasarkan jaring anda di atas.

(20 marks/*markah*)

(vi) **If only TWO (2) elements are being used to solve the problem, <u>without any calculations</u>, explain how you are going to incorporate the THREE (3) different material properties into the mesh of TWO (2) elements.**

Jika hanya DUA (2) unsur akan digunakan untuk menyelesaikan masalah ini, <u>tanpa sebarang pengiraan</u>, terangkan bagaimana anda akan mengisi ketiga-tiga (3) ciri bahan ke dalam jaring DUA (2) unsur ini.

(15 marks/*markah*)

Q2. **[a]** **Explain with the help of examples, the difference between Dirichlet and Neumann boundary conditions.**

Dengan berbantukan contoh-contoh, terangkan perbezaan di antara keadaan sempadan Dirichlet and Neumann.

(20 marks/*markah*)

[b] **For the case of steady heat conduction with no heat generation and Δx = Δy, using the finite difference scheme, show that the temperature equation at the plane surface with convection (Figure Q2[b]) is given by:**

Bagi kes konduksian haba mantap dengan tiada penjanaan haba dan Δx = Δy, dengan menggunakan skim pembezaan terhingga, tunjukkan persamaan suhu pada sebuah satah permukaan dengan perolakan (Rajah S2[b]) diberikan sebagai:

$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2(\frac{h\Delta x}{k} + 2)T_{m,n} = 0$$

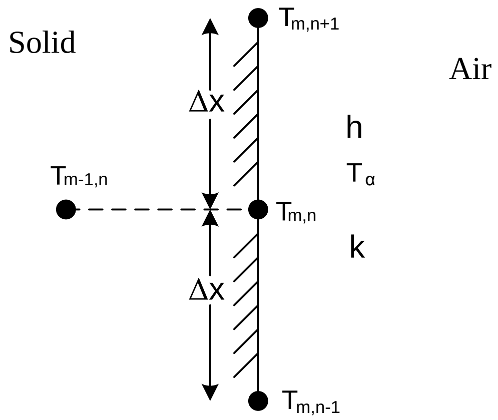

Figure Q2[b]
Rajah S2[b]

(30 marks/*markah*)

[c] **Solve the unsteady heat conduction on the rod given below using a simple implicit method.**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad 0 \le t \le 0.25\,\text{s} \quad \text{and} \quad 0 \le x \le 4\,\text{m}$$

Given the initial and boundary conditions as

T(x, 0) = 100°C, $\quad 0 \le x \le 4\,\text{m}$
T(0, t) = 150°C, $\quad 0 \le t \le 0.25\,\text{s}$
T(4, t) = 100°C, $\quad 0 \le t \le 0.25\,\text{s}$

Use a simple implicit formula as

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1 + 2\lambda)T_{i+1}^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = T_i^l$$

Assume that $\lambda = \frac{k}{\rho C}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, *ρ=2700kg/m³, C=0.91kJ/kgK* **and** *k=0.2kW/mK.* **Calculate for the first three time steps. If the temperature also can be calculated using the theory using the equation below:**

$$T(x,t) = \frac{16}{\pi^2}\left[exp\left(\frac{\pi^2 \alpha t}{16}\right) sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{1}{9} exp\left(-\frac{9\pi^2 \alpha t}{16}\right) sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$$

where α=k/ρC

Compare your results with the theoretical values.

Selesaikan kekonduksian haba tak mantap ke atas rod diberikan di bawah dengan menggunakan kaedah implisit mudah.

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$, $0 \le t \le 0.25\,\text{s}$ and $0 \le x \le 4\,\text{m}$

Diberikan keadaan awal dan sempadan sebagai

T(x, 0) = 100°C, $0 \le x \le 4\,\text{m}$
T(0, t) = 150°C, $0 \le t \le 0.25\,\text{s}$
T(4, t) = 100°C, $0 \le t \le 0.25\,\text{s}$

Menggunakan formula implisit mudah sebagai

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1+2\lambda)T_{i+1}^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = T_i^l$$

Anggapkan $\lambda = \frac{k}{\rho C}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, *ρ=2700kg/m³, C=0.91kJ/kgK dan k=0.2kW/mK. Kirakan bagi tiga selang masa pertama. Jika suhu juga boleh dikirakan secara teori dengan persamaan dibawah:*

$$T(x,t) = \frac{16}{\pi^2}\left[exp\left(\frac{\pi^2 \alpha t}{16}\right) sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{1}{9} exp\left(-\frac{9\pi^2 \alpha t}{16}\right) sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$$

di sini α=k/ρC

Bandingkan keputusan anda dengan nilai teori.

(50 marks/*markah*)

Q3. [a] In your own words, explain what is a well-posed mathematical problem.

Dengan menggunakan pemahaman sendiri, terangkan maksud masalah matematik yang sempurna.

(40 marks/*markah*)

[b] The 1D heat equation is to be solved on a grid consisting of just three points $u_{1,2,3}$. Of these, u_1 and u_3 are boundary values fixed at zero. The only value u_2 is the determined through computation with initial value

$$u_2 = 1$$
$$u_t = \kappa u_{xx}$$

The solution is updated using central differencing in space with $\kappa > 0$. Consider the two cases below.

(i) Assume the temporal discretization is forward in time. Determine the equation for finding u_2^n and the stability condition.

Persamaan haba 1D adalah diselesaikan menggunakan tiga titik grid $u_{1,2,3}$. u_1 dan u_3 adalah titik-titik di sempadan dan mempunyai nilai sifar. u_2 adalah ditentukan melalui pengiraan dan mempunyai nilai awal

$$u_2 = 1$$
$$u_t = \kappa u_{xx}$$

Masalah ini diselesaikan dengan menggunakan perbezaan tengah untuk ruang dengan $\kappa > 0$. Kaji dua kes di bawah.

(i) Anggap diskretasi masa adalah pendiskretan hadapan. Tentukan persamaan untuk u_2^n dan tentukan had stabil.

(30 marks/*markah*)

(ii) Now assume the temporal discretization is backward in time. Determine the equation for finding u_2^n and the stability condition.

Anggap pendiskretan masa adalah pendiskretan belakang. Tentukan persamaan untuk u_2^n dan tentukan had stabil.

(30 marks/*markah*)

-oooOOooo-