
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2002/2003

Februari – Mac 2003

ZCT 218/3 - Kaedah Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua LIMA soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

(1) (a) Pertimbangkan fungsi berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin(x), & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(i) Lakarkan fungsi ini dalam julat yang diberikan.

(10/100)

(ii) Wakilkan fungsi $f(x)$ ini dalam julat $-\pi < x < \pi$, dengan siri Fourier.

(40/100)

(iii) Tuliskan 5 sebutan pertama dari siri Fourier ini.

(10/100)

(b) Wakilkan fungsi:

$$f(x) = e^{2x}, \quad -\pi < x < \pi$$

dalam julat yang diberikan dengan siri Fourier bentuk kompleks.

(40/100)

(2) (a) Cari songsangan transformasi Laplace bagi:

$$F(s) = \left\{ \frac{2s-1}{s^2-2s+10} \right\}$$

(20/100)

(b) Cari transformasi Laplace bagi:

$$f(t) = \cosh(at)\cos(at)$$

(20/100)

(c) Dengan menggunakan teknik transformasi Laplace, selesaikan persamaan pembezaan yang berikut:

$$y'' + y = \sin(t)$$

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$$

(60/100)

(3) (a) Cari transformasi Fourier untuk denyutan segitiga:

$$f(x) = \begin{cases} h(1-|a|x); & |x| < \frac{1}{a} \\ 0; & |x| > \frac{1}{a} \end{cases}$$

(75/100)

(b) Takrifan kamiran tetap bagi fungsi Gamma, $\Gamma(z)$, diberikan sebagai:

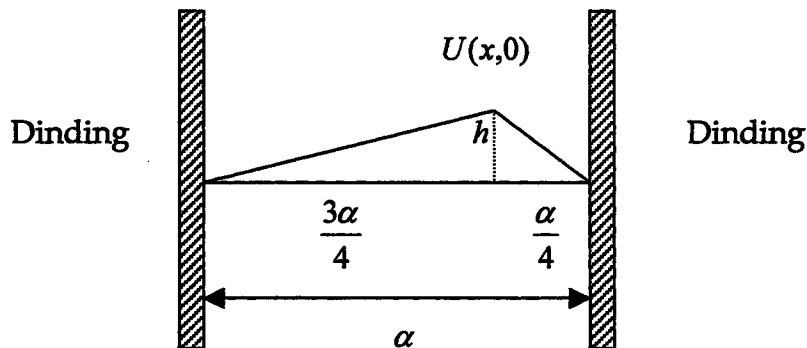
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \text{Re}(z) > 0$$

Dengan menggunakan takrifan ini, nilaikan kamiran berikut:

$$I = \int_0^1 x^2 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^3 dx$$

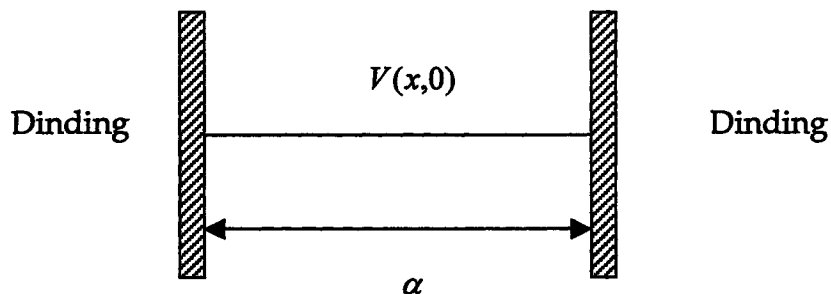
(25/100)

- (4) Satu tali yang tidak kenyal diregangkan, dan hujung-hujungnya diikat dengan ketat pada dinding. Panjang tali ini ialah α dan ketumpatan jisim per unit panjangnya ialah σ . Pada masa $t = 0$, keadaan tali dengan ketegangan T adalah seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1.



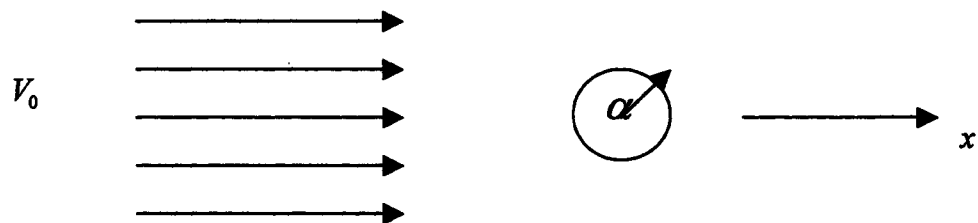
Rajah 1

Halaju tali melintang pada tali bila $t = 0$, iaitu $V(x,0) = \left. \frac{dU(x,t)}{dt} \right|_{t=0}$ adalah seperti yang ditunjukkan pada Rajah 2.



Rajah 2

- (a) Tuliskan persamaan gelombang bagi sesaran melintang sistem tali yang bergetar, $U(x,t)$. (10/100)
- (b) Dengan kaedah pembolehubah terpisahkan, terbitkan penyelesaian am bagi persamaan gelombang dalam (a). (30/100)
- (c) Nyatakan syarat-syarat sempadan dan syarat-syarat awal bagi sistem tali yang dihuraikan di atas. (15/100)
- (d) Dengan jawapan-jawapan dalam (b) dan (c), cari penyelesaian khusus bagi $U(x,t)$. (35/100)
- (e) Tentukan halaju melintang, $V(x,t)$ pada tali ini. (10/100)
- (5) Satu bendalir yang tidak termampatkan mengalir secara mantap dengan kelajuan V_0 ke arah x di dalam satu ruang yang sangat besar. Dalam pengalirannya wujud satu halangan sfera yang berjajari a (rujuk Rajah 3).



Rajah 3

- (a) Tuliskan persamaan pembezaan bagi system ini. (15/100)
- (b) Tuliskan syarat-syarat sempadan bagi system ini. (15/100)
- (c) Dengan kaedah pembolehubah terpisahkan, cari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan dalam (a). (30/100)
- (d) Dengan jawapan-jawapan di atas, terbitkan halaju bendalir di seluruh ruang di luar halangan tersebut. (40/100)

Lampiran

Jadual Transformasi Laplace

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at} \sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$

Operator ∇ dan ∇^2 dalam system koordinat sfera adalah:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Harmonik-harmonik sfera yang bertertib rendah adalah seperti berikut:

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\phi}$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{-i\phi}$$

$$Y_2^2(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2(\theta) e^{i2\phi}$$

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\phi}$$

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} [3 \cos^2(\theta) - 1]$$

$$Y_2^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{-i\phi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2(\theta) e^{-i2\phi}$$