

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang Akademik 2002/2003

Februari - Mac 2003

**ZCE 208/2 - MEKANIK KLASIK**

Masa: 2 jam

---

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TUJUH** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua TIGA soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia. Diberi bersama kertas soalan ini ialah Jadual Formula (3 muka surat).

1.

(A) Jika tenaga potensial suatu sistem  $A$  ialah  $U_A$ , apakah daya konservatifnya  $\vec{F}_A$ ? Jika daya dalam sistem  $B$  ialah

$$\vec{F}_B = x^2yz \vec{e}_1 - xz \vec{e}_2 + xyz^2 \vec{e}_3,$$

cari  $\vec{\nabla} \times \vec{F}_B$ . Adakah sistem  $B$  suatu sistem konservatif?

(B) Suatu partikel berjisim 6 kg bergerak di dalam satah  $xy$ , dalam suatu medan daya berpotensi  $U = 6x(3y - 4x)$ . Pada awal, partikel itu berada di titik (5 m, -5 m) dan mulai bergerak pada masa  $t = 0$  dari rehat.

- (a) Dari tenaga potensial  $U$ , cari daya konservatif  $\vec{F}$  medan itu.
- (b) Dengan menggunakan Hukum Newton Kedua, tulis persamaan gerakan Newton bagi partikel itu.
- (c) Selesaikan persamaan gerakan Newton yang didapati di bahagian (b).
- (d) Cari posisi partikel itu pada sebarang masa.
- (e) Cari halajunya pada sebarang masa.

(36/100)

2.

(A) Nyatakan Prinsip Hamilton. Juga tulis formulanya dalam Kalkulus Variasi.

(B) Suatu manik berjisim  $m$  menggelongsor tanpa rintangan disepanjang suatu dawai dalam bentuk suatu sikloid dengan persamaan

$$x = k(\theta - \sin \theta), \quad y = k(1 + \cos \theta), \quad \text{di mana } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1)$$

- (a) Lakarkan graf bagi Eq. (1), iaitu lintasan manik itu.
- (b) Cari (i) tenaga kinetik  $T$ , (ii) tenaga potensial  $U$  dan (iii) fungsi Lagrangian  $L$  dalam sebutan  $m$ ,  $k$  dan  $\theta$ .
- (c) Cari persamaan gerakan Lagrange bagi manik itu.
- (d) Dari fungsi Lagrangian  $L$  dalam bahagian (b), cari fungsi Hamiltonian  $H$ . Adakah fungsi Hamiltonian  $H$  sama dengan jumlah tenaga  $E$  manik itu? Kalau ya, sebut syarat-syaratnya.
- (e) Tunjukkan persamaan Lagrange di bahagian (c) boleh di tulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4k}u = 0.$$

di mana  $u = \cos(\theta/2)$ .

(f) Cari penyelesaian bagi persamaan gerakan di bahagian (e). Apakah tempoh osilasi manik itu?

(34/100)

3.

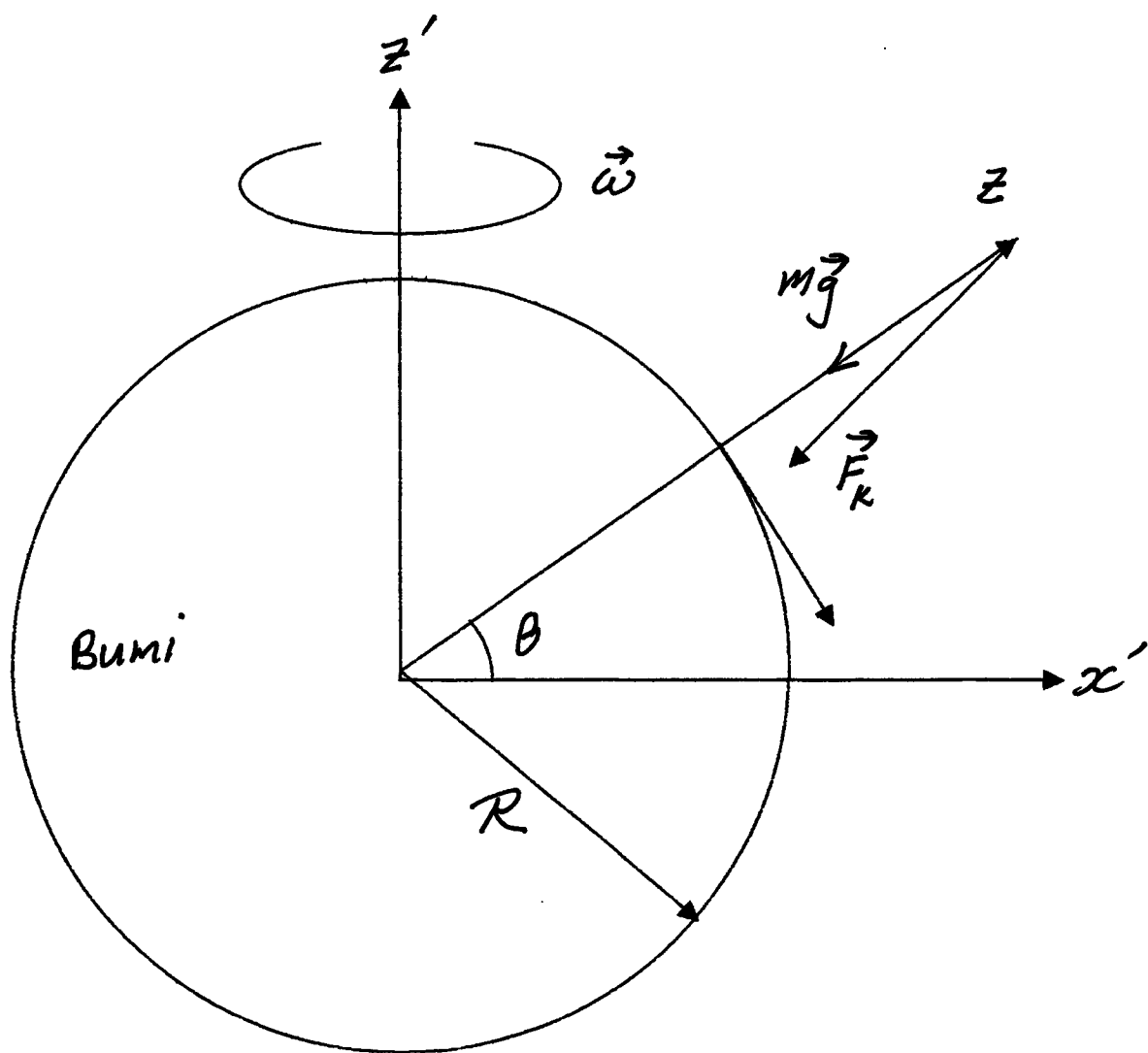
(A) Tulis formula daya berkesan  $\vec{F}_k$  bagi suatu partikel  $P$  berjisim  $m$  yang bergerak dengan halaju  $\vec{v}_p$  relatif ke Bumi. Anggapkan Bumi berputar dengan halaju sudut  $\vec{\omega}$  terhadap paksinya. Apakah daya emparan dan daya Coriolis yang dialami oleh partikel itu?

(B) Tunjukkan bahawa sudut sisihan kecil  $\varepsilon$  suatu garisan batu ladung dari garisan tegak yang sebenar (iaitu garisan dari titik gantung ke pusat Bumi) pada suatu titik di permukaan Bumi pada suatu latitud  $\theta$  adalah

$$\varepsilon = \frac{R\omega^2 \sin 2\theta}{2g - R\omega^2(1 + \cos 2\theta)}$$

di mana  $R$  ialah jejari Bumi. Apakah nilai maksimum sudut sisihan  $\varepsilon$  dalam unit radian? Diberi  $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ ,  $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ , dan  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ .

(30/100)



A P P E N D I X

# D

## USEFUL FORMULAS\*

### D.1 BINOMIAL EXPANSION

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots, \quad |x| < 1 \tag{D.1}$$

$$(1 - x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + (-1)^r \binom{n}{r}x^r + \dots, \quad -|x| < 1 \tag{D.2}$$

where the binomial coefficient is

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{D.3}$$

Some particularly useful cases of the above are

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \dots \tag{D.4}$$

\* An extensive list may be found, for example, in Dwight (Dw61).

$$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 - \dots$$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \mp \frac{14}{81}x^3 + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 + \dots$$

For convergence of all the above series, we must have  $|x| < 1$ .

**D.2 TRIGONOMETRIC RELATIONS**

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos A)$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

$$\sin^3 A = \frac{1}{4}(3 \sin A - \sin 3A)$$

$$\sin^4 A = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2A + \cos 4A)$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

$$\cos^3 A = \frac{1}{4}(3 \cos A + \cos 3A)$$

$$\cos^4 A = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2A + \cos 4A)$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \tag{D.24}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{D.25}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{D.26}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{D.27}$$

**D.3 TRIGONOMETRIC SERIES**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{D.28}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{D.29}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \quad |x| < \pi/2 \tag{D.30}$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \dots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ |\sin^{-1} x| < \pi/2 \end{cases} \tag{D.31}$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \dots, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ 0 < \cos^{-1} x < \pi \end{cases} \tag{D.32}$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1 \tag{D.33}$$

**D.4 EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC SERIES**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{D.34}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1, \quad x = 1 \tag{D.35}$$

$$\ln[\sqrt{(x^2/a^2) + 1} + (x/a)] = \sinh^{-1} x/a$$

$$= -\ln[\sqrt{(x^2/a^2) + 1} - (x/a)] \tag{D.36}$$

$$\tag{D.37}$$

**D.5 COMPLEX QUANTITIES**

Cartesian form:  $z = x + iy$ , complex conjugate  $z^* = x - iy$ ,  $i = \sqrt{-1}$  (D.38)

Polar form:

$$z = |z|e^{i\theta} \quad (D.39)$$

$$z^* = |z|e^{-i\theta} \quad (D.40)$$

$$zz^* = |z|^2 = x^2 + y^2 \quad (D.41)$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*) = x \quad (D.42)$$

$$\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2i}(z - z^*) = y \quad (D.43)$$

Euler's formula:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (D.44)$$

**D.6 HYPERBOLIC FUNCTIONS**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (D.45)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (D.46)$$

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (D.47)$$

$$\sin ix = i \sinh x \quad (D.48)$$

$$\cos ix = \cosh x \quad (D.49)$$

$$\sinh ix = i \sin x \quad (D.50)$$

$$\cosh ix = \cos x \quad (D.51)$$

$$\sinh^{-1} x = \tanh^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \quad (D.52)$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (D.53)$$

$$= \cosh^{-1}(\sqrt{x^2 + 1}), \quad \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases} \quad (D.54)$$

$$\cosh^{-1} x = \pm \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right), \quad x > 1 \quad (D.55)$$

$$= \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x > 1 \quad (D.56)$$

$$= \pm \sinh^{-1}(\sqrt{x^2 - 1}), \quad x > 1 \quad (D.57)$$

$$\frac{d}{dy} \sinh y = \cosh y \quad (D.58)$$

$$\frac{d}{dy} \cosh y = \sinh y \quad (D.59)$$

$$\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2 \quad (D.60)$$

$$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2 \quad (D.61)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (D.62)$$