

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
2010/2011 Academic Session

November 2010

**IUK 191 – MATHEMATICS I**  
**[MATEMATIK I]**

Duration: 3 hours  
*Masa: [3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer FIVE questions. You may answer the questions either in Bahasa Malaysia or in English.

**Arahan:** *Jawab LIMA soalan. Anda dibenarkan menjawab soalan sama ada dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]*

1. (a) Suppose that  $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + A & \text{if } x > 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \\ Bx^3 & \text{if } x < 1 \end{cases}$ , where  $A$  and  $B$  are constants.

(i) If  $f(x)$  is continuous at  $x=1$ , show that  $A^2 + B^2 - 3 = 10$ .

(ii) Find  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

(6 marks)

- (b) If  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ ,

(i) find  $f'(x)$ . Simplify your answer.

(ii) find equations of the tangent line and normal line to the curve of

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \text{ at the point } x=1.$$

(10 marks)

- (c) Evaluate  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{6x}$ . (Hint:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1$ )

(3 marks)

2. (a) If  $f(x) = \sqrt{x} g(x)$ , where  $g(4) = 8$  and  $g'(4) = 7$ , find

(i)  $f'(4)$ .

(ii)  $f g(4)$ .

(3 marks)

- (b) Use definition of limit to prove that  $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 5) = 7$ .

(5 marks)

- (c) Give the exact value for  $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + 2\cos^{-1}\frac{1}{5}\right)$ .

(Hint:  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,  
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ )

(4 marks)

- (d) Suppose a company has a marginal cost function  $y = C'(x) = x\sqrt{9+x^2}$ , where  $x$  is the number of thousands of items sold and the cost  $C$  is in thousands of ringgit. If fixed costs are RM11 thousand, what is the total cost of manufacturing the first 4 thousand items?  
(5 marks)
3. (a) According to a certain model, the world population (in billions)  $t$  years after 1960 is modelled by the function  $p(t) = \frac{40}{1+12e^{-0.08t}}$ .
- (i) If this model is correct, at what rate will the world population be increasing with respect to time in the year 2010?
- (ii) At what percentage rate will it be increasing at this time?
- (iii) What is the highest world population expected to be?  
(8 marks)
- (b) Solve the initial value problem of the differential equations
- (i)  $\frac{dv}{dt} = 2tv + 3t^2e^{t^2}$  with  $v(0) = 5$
- (ii)  $\frac{dy}{dx} = xe^{-\sin x} - y \cos x$  with  $y(0) = 2$   
(10 marks)
- (c) Two ships leave the same port at 2 p.m. The first ship heads due north and at 3 p.m. is observed to be 6 miles due north of port. The ship is going at 12.5 miles per hour at that instant. The second ship leaves the port at the same time as the first ship, and heads due east. One hour later, the second ship is observed to be 8 miles due east of port and going at 14.5 miles per hour. At what rate is the distance between the two ships changing at 3 p.m.? Hint: Let  $a(t)$  and  $b(t)$  be the distances that the first and second ships are from port at time  $t$  (hours) after leaving.  
(5 marks)
4. (a) Find the critical points of  $f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$ .  
(5 marks)
- (b) Find the area of the region bounded by the curve  $y = x^2 - 4$  and the  $x$ -axis.  
(5 marks)

- (c) A manufacturer needs to make a cylindrical can that will hold 1.5 L of liquid. Determine the dimensions that will minimize the cost of the material to manufacture the can. (Hint: Volume,  $V = \pi r^2 h$  and surface area,  $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ,  $1 L = 1000 \text{ cm}^3$ )

(5 marks)

5. (a) Evaluate

(i)  $\int_1^4 (5x - 2\sqrt{x} + \frac{32}{x^3}) dx$

(ii)  $\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx$

(iii)  $\int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$

(iv)  $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

(10 marks)

- (b) Find the length of the curve  $y^2 = x^3$  between the points (1,1) and (4,8).

(4 marks)

- (c) Solve by Cramer's Rule.

$$2x + y + z = 3$$

$$x - y - z = 0$$

$$x + 2y + z = 0$$

(4 marks)

- (d) Sketch the graph of  $f(x) = -x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{40}{3}x^3 + 5$ .

(8 marks)

1. (a) Andaikan  $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + A & \text{if } x > 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \\ Bx^3 & \text{if } x < 1 \end{cases}$ , di mana  $A$  dan  $B$  adalah pemalar.

(i) Jika  $f(x)$  selanjar pada  $x=1$ , tunjukkan bahawa  $A^2 + B^2 - 3 = 10$ .

(ii) Cari  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

(6 markah)

(b) Jika  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ ,

(i) cari  $f'(x)$ . Permudahkan jawapan anda.

(ii) cari persamaan bagi garis tangen dan garis normal pada lengkung

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \text{ pada titik } x=1.$$

(10 markah)

(c) Kirakan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{6x}$ . (Petunjuk:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1$ )

(3 markah)

2. (a) Jika  $f(x) = \sqrt{x} g(x)$ , di mana  $g(4) = 8$  dan  $g'(4) = 7$ , cari

(i)  $f'(4)$ .

(ii)  $f g(4)$ .

(3 markah)

(b) Gunakan definisi had untuk membuktikan bahawa  $\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 5) = 7$ .

(5 markah)

(c) Berikan nilai yang tepat untuk  $\cos\left(\sin^{-1} \frac{1}{5} + 2 \cos^{-1} \frac{1}{5}\right)$ .

(Petunjuk:  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ,  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,  
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ )

(4 markah)

- (d) Andaikan sebuah syarikat mempunyai fungsi maginal kos  $y = C'(x) = x\sqrt{9+x^2}$ , di mana  $x$  ialah jumlah ribuan item yang terjual dan kos  $C$  adalah dalam ribuan ringgit. Jika kos tetap ialah RM11 ribu, apakah jumlah kos pengeluaran 4 ribu item pertama?  
(5 markah)

3. (a) Berdasarkan kepada suatu model, populasi dunia (dalam billion)  $t$  tahun

$$\text{selepas 1960 dimodelkan oleh fungsi } p(t) = \frac{40}{1+12e^{-0.08t}}.$$

- (i) Jika model ini betul, pada kadar berapakah populasi dunia akan meningkat terhadap masa dalam tahun 2010?  
(ii) Pada kadar peratusan berapakah populasi dunia akan meningkat ketika ini?  
(iii) Apakah jumlah penduduk dunia tertinggi yang dijangka?  
(8 markah)

- (b) Selesaikan masalah nilai awal persamaan pembezaan

(i)  $\frac{dv}{dt} = 2tv + 3t^2 e^{t^2}$  dengan  $v(0) = 5$

(ii)  $\frac{dy}{dx} = xe^{-\sin x} - y \cos x$  dengan  $y(0) = 2$

(10 markah)

- (c) Dua kapal meninggalkan pelabuhan yang sama pada pukul 2 petang. Kapal pertama menuju ke utara dan pada pukul 3 petang dilihat berada 6 batu ke utara pelabuhan. Kapal ini bergerak pada 12.5 batu per jam pada saat itu. Kapal kedua meninggalkan pelabuhan pada masa yang sama dengan kapal pertama dan menuju ke timur. Satu jam kemudian, kapal kedua dilihat berada 8 batu ke timur pelabuhan dan bergerak pada 14.5 batu per jam. Pada kadar apakah, jarak di antara kedua-dua kapal berubah pada pukul 3 petang? Petunjuk: Biarkan  $a(t)$  dan  $b(t)$  sebagai jarak kapal pertama dan kedua dari pelabuhan pada masa  $t$  (jam) selepas meninggalkan pelabuhan.

(5 markah)

4. (a) Cari titik-titik genting bagi  $f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$ .  
(5 markah)

(b) Cari luas rantau yang dibatasi oleh lengkung  $y = x^2 - 4$  dan paksi- $x$ .  
(5 markah)

(c) Seorang pengeluar perlu membuat satu tin selinder yang akan menampung 1.5 L cecair. Tentukan dimensi yang akan meminimumkan kos bahan untuk menghasilkan tin tersebut. (Petunjuk: Isipadu,  $V = \pi r^2 h$  dan luas permukaan,  $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ,  $1 L = 1000 \text{ cm}^3$ )  
(5 markah)

5. (a) Nilaikan

(i)  $\int_1^4 (5x - 2\sqrt{x} + \frac{32}{x^3}) dx$

(ii)  $\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx$

(iii)  $\int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$

(iv)  $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

(10 markah)

(b) Cari panjang lengkung  $y^2 = x^3$  di antara titik-titik (1,1) dan (4,8).

(4 markah)

(c) Selesaikan dengan Petua Cramer

$$2x + y + z = 3$$

$$x - y - z = 0$$

$$x + 2y + z = 0$$

(4 markah)

(d) Lakarkan graf bagi  $f(x) = -x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{40}{3}x^3 + 5$ .

(8 markah)