
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2010/2011 Academic Session

April/May 2011

CPT112 – Discrete Structures
[Struktur Diskret]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

INSTRUCTIONS TO CANDIDATE:
[ARAHAN KEPADA CALON:]

- Please ensure that this examination paper contains **FOUR** questions in **THIRTEEN** printed pages before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** soalan di dalam **TIGA BELAS** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

- Answer **ALL** questions.

*[Jawab **SEMUA** soalan.]*

- You may answer the questions either in English or in Bahasa Malaysia.

[Anda dibenarkan menjawab soalan sama ada dalam bahasa Inggeris atau bahasa Malaysia.]

- In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. (a) Answer the following questions:

(i) Find the sets A and B if $A - B = \{1,5,7,8\}$, $B - A = \{2,10\}$, and $A \cap B = \{3,6,9\}$.

(15/100)

(ii) Show if that A and B are finite sets, then $|A \cap B| \leq |A \cup B|$. Determine when this relationship is an equality.

(15/100)

(b) Show your work to the following questions:

(i) Prove that if n is an odd integer, then $\lceil n^2 / 4 \rceil = (n^2 + 3) / 4$.

(15/100)

(ii) Determine a rule for generating the terms of the sequence that begins 2, 3, 3, 5, 10, 13, 39, 43, 172, 177, 885, 891,

(15/100)

(iii) Decide whether each of these integers is congruent to 5 modulo 17.

(A) 80 (B) 103 (C) -29 (D) -122

(10/100)

(c) What is the best order to form the product $ABCD$ if A , B , C , and D are matrices with dimensions 30×10 , 10×40 , 40×50 , and 50×30 , respectively? Assume that the number of multiplications of entries used to multiply a $p \times q$ matrix and a $q \times r$ matrix is pqr . Show your work.

(15/100)

- (d) What is wrong with this "proof"?

"Theorem": For every positive integer n , $\sum_{i=1}^n i = (n + \frac{1}{2})^2 / 2$.

Basic Step: The formula is true for $n=1$.

Induction Step: Suppose that $\sum_{i=1}^n i = (n + \frac{1}{2})^2 / 2$. Then $\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) + (n+1)$. By the inductive hypothesis,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= (n + \frac{1}{2})^2 / 2 + n + 1 \\ &= (n^2 + n + \frac{1}{4}) / 2 + n + 1 \\ &= (n^2 + 3n + \frac{9}{4}) / 2 \\ &= (n + \frac{3}{2})^2 / 2 \\ &= [(n+1) + \frac{1}{2}]^2 / 2 \end{aligned}$$

thus completing the inductive step.

(15/100)

2. (a) An ice cream parlor has 28 different flavors, 8 different kinds of sauce, and 12 toppings.

- (i) In how many different ways can a dish of three scoops of ice cream be made where each flavor can be used more than once and the order of the scoops does not matter?

(15/100)

- (ii) How many different kinds of small sundaes are there if a small sundae contains one scoop of ice cream, a sauce, and a topping?

(15/100)

- (b) Given a set of 10 positive integers not exceeding 50.

- (i) How many different subsets of five-element are there for this 10 positive integer set?

(15/100)

- (ii) Show that there exist at least two different five-element subsets of this set that have the same sum.

(10/100)

- (c) Suppose n people, $n \geq 3$, play "odd person out" to decide who will buy the next round of refreshments. The n people each flip a fair coin simultaneously. If all the coins but one come up the same, the person whose coin comes up different buys the refreshments. Otherwise, the people flip the coins again and continue until just one coin comes up different from all the others. What is the probability that the odd person out is decided in just one coin flip?

(15/100)

- (d) Show your work to the following questions:

- (i) Using while-loop to write a pseudocode for calculating $\sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^n a_{i,j}$ where $a_{i,j}$ is the i -th row and j -th column of a matrix A .

(15/100)

- (ii) The following is a recursive algorithm for calculating a sequence, where function "print(result)" means printing out the value of variable "result". List the first **five (5)** numbers being printed out when $n = 10$. Show your work.

```

Function sequence(n)
  n, result: integer
Begin
  if n = 0
    result ← 0
    print(result)
  else
    if n = 1
      result ← 1
      print(result)
    else
      result ← sequence(n-1) + sequence(n-2)
      print(result)
End

```

(15/100)

3. (a) Suppose that R_1 and R_2 relations on a set X , A_1 is the matrix of relation R_1 relative to some ordering of X , and A_2 is the matrix of relation R_2 relative to the same ordering of X . Let A be a matrix whose ij -th entry is 0 if the ij -th entry of both A_1 and A_2 is 0.

(i) Prove that A is the matrix of $R_1 \cup R_2$.

(15/100)

(ii) Suppose that the matrix of the relation R_1 on $\{1,2,3\}$ is $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relative to the ordering 3,2,1, and the matrix of relation R_2 on

$\{1,2,3\}$ is $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relative to the ordering 3,2,1. Find the

matrix of the relation A to ordering 1,2,3.

(10/100)

(iii) Determine whether $R = R_1 \cup R_2$ is an equivalence relation.

(15/100)

- (b) Find a theta notation for the worst-case time required by the following algorithm:

```

Iskey(s, n, key) {
  for i = 1 to n
    for j = i to n
      if (si + sj == key)
        return 1
      else
        return 0
}

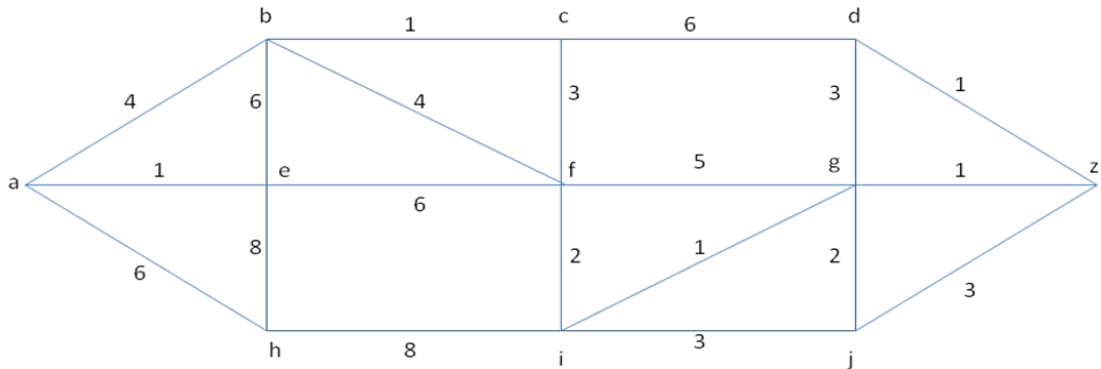
```

(15/100)

- (c) Given a function f defined by $f(x) = \lceil x \rceil - 1$ and the domain of the function f is the set of real numbers. Determine whether f is bijection.

(15/100)

- (d) Use Dijkstra's algorithm to find the shortest path length from a to z in the following weighted graph. Show your work.



(30/100)

4. (a) Draw a parsing tree for algebra expression $((A + B * (C + D) * E) - (A + B) * C - D)$.

(20/100)

- (b) The delay time for a packet travelling between four routers (a, b, c, d) is given in the following table:

From \ To	a	b	c	d
a	-	1 msec	2 msec	-
b	2 msec	-	-	5 msec
c	-	2 msec	-	-
d	5 msec	5 msec	2msec	-

- (i) Draw the relation digraph from the information given by the above table.

(10/100)

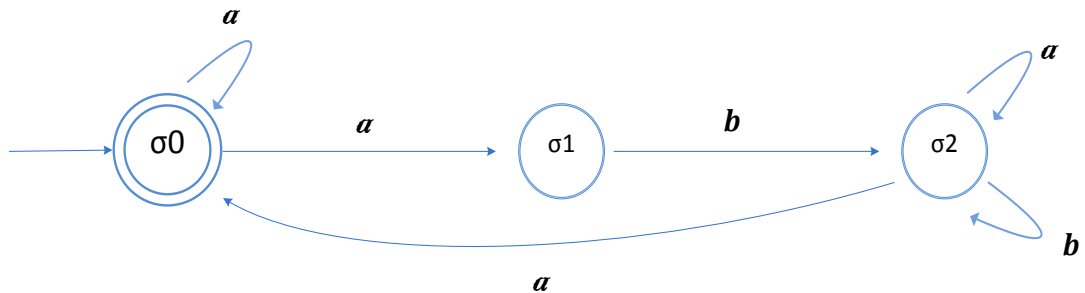
- (ii) Relation R on set $\{a, b, c, d\}$ is defined as follows: " xRy if the delay time from router x to router y is more than 3 msec". Write relation R in its matrix form.

(10/100)

- (iii) Based on the delay time table given above, write a matrix representation of relation H , where relation H is defined as follows: " xHy if there exists a path of length one or a path of length two from router x to router y ".

(10/100)

(c) Given the following non-deterministic finite state machine:



- (i) Find the input set V , the accepting states set T , the states set S , and initial state for the machine. (10/100)
- (ii) Write the transition table for the machine. (10/100)
- (iii) Write the simplest phrase structure grammar, $G=(V,T,S,P)$, for the machine. (10/100)
- (iv) Rewrite the grammar you found in question 4(c)(iii) in BNF notation. (10/100)
- (v) Is the string $aabaaba$ an accepted string by the finite-state machine? (10/100)

KERTAS SOALAN DALAM VERSI BAHASA MALAYSIA

[CPT112]

- 8 -

1. (a) Jawab soalan-soalan berikut:

(i) Cari set-set A and B jika $A - B = \{1,5,7,8\}$, $B - A = \{2,10\}$, dan $A \cap B = \{3,6,9\}$.

(15/100)

(ii) Tunjukkan bahawa jika A dan B ialah set terhingga, maka $|A \cap B| \leq |A \cup B|$.
Tentukan bilakah hubungan ini ialah suatu kesamaan.

(15/100)

(b) Tunjukkan jalan kerja anda bagi soalan-soalan berikut:

(i) Buktikan bahawa jika n ialah integer ganjil, maka $\lceil n^2 / 4 \rceil = (n^2 + 3) / 4$.

(15/100)

(ii) Tentukan petua untuk menjana sebutan-sebutan bagi jujukan yang bermula 2, 3, 3, 5, 10, 13, 39, 43, 172, 177, 885, 891,

(15/100)

(iii) Tentukan sama ada setiap satu integer di bawah adalah kongruen terhadap 5 modulo 17.

(A) 80 (B) 103 (C) -29 (D) -122

(10/100)

(c) Apakah tertib terbaik untuk membentuk hasil darab $ABCD$ jika A , B , C , dan D merupakan matriks-matriks yang masing-masing berdimensi 30×10 , 10×40 , 40×50 , dan 50×30 ? Andaikan bahawa bilangan pendaraban kemasukan yang digunakan untuk mendarab matriks $p \times q$ dan matriks $q \times r$ ialah pqr . Tunjukkan jalan kerja anda.

(15/100)

- (d) Apakah kesilapan dalam "pembuktian" berikut?

"Teorem": Bagi setiap integer positif n , $\sum_{i=1}^n i = (n + \frac{1}{2})^2 / 2$.

Langkah Asas: Rumus tersebut adalah benar bagi $n=1$.

Langkah Aruhan: Andaikan bahawa $\sum_{i=1}^n i = (n + \frac{1}{2})^2 / 2$. Maka $\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) + (n+1)$.

Dengan menggunakan hipotesis aruhan,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= (n + \frac{1}{2})^2 / 2 + n + 1 \\ &= (n^2 + n + \frac{1}{4}) / 2 + n + 1 \\ &= (n^2 + 3n + \frac{9}{4}) / 2 \\ &= (n + \frac{3}{2})^2 / 2 \\ &= [(n+1) + \frac{1}{2}]^2 / 2 \end{aligned}$$

maka langkah aruhan menjadi lengkap.

(15/100)

2. (a) Sebuah kedai aiskrim menjual aiskrim dengan 28 jenis perasa, 8 jenis sos dan 12 jenis hiasan atas.

- (i) Berapakah cara yang berbeza yang boleh dilakukan bagi menyediakan semangkuk aiskrim yang mengandungi tiga skup aiskrim yang mana setiap jenis perasa boleh digunakan lebih daripada sekali tanpa menghiraukan tertib skup tersebut?

(15/100)

- (ii) Berapakah jenis aiskrim sundae kecil yang ada jika satu aiskrim *sundae* kecil itu terdiri daripada satu skup aiskrim, sejenis sos dan sejenis hiasan atas?

(15/100)

- (b) Diberi satu set yang mengandungi 10 integer positif tidak melebihi 50.

- (i) Berapa banyak subset lima unsur yang berlainan boleh diperoleh daripada set yang mengandungi 10 integer positif ini?

(15/100)

- (ii) Tunjukkan bahawa terdapat sekurang-kurangnya dua subset lima unsur yang berlainan bagi set ini yang mempunyai hasil tambah yang sama.

(10/100)

- (c) Andaikan n orang, $n \geq 3$, bermain permainan "siapa ganjil, dia keluar" untuk menentukan siapa yang akan membeli kudapan bagi pusingan seterusnya. Setiap n orang itu melambung duit syiling adil secara serentak. Jika hasil lambungan kesemua syiling itu sama kecuali satu, orang yang hasil lambungan syilingnya berbeza daripada yang lain akan membeli kudapan. Jika tidak, kesemua orang akan melambung duit syiling masing-masing sekali lagi dan terus melambung sehingga terdapat satu syiling yang hasil lambungannya berbeza daripada yang lain. Apakah kebarangkalian bahawa permainan "siapa ganjil, dia keluar" itu ditentukan oleh satu lambungan syiling sahaja?

(15/100)

- (d) Tunjukkan jalan kerja untuk soalan-soalan berikut:

- (i) Dengan menggunakan gelung-while untuk menulis suatu pseudokod bagi mengira $\sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^n a_{i,j}$ diberi $a_{i,j}$ ialah baris ke- i dan lajur ke- j bagi matriks A .

(15/100)

- (ii) Berikut ialah algoritma rekursi untuk mengira suatu jujukan, diberi fungsi "print(result)" bermakna mencetak nilai pembolehubah "result". Senaraikan lima nombor pertama yang dicetak apabila $n = 10$. Tunjukkan jalan kerja anda.

```

Function sequence(n)
    n, result: integer
Begin
    if n = 0
        result ← 0
        print(result)
    else
        if n = 1
            result ← 1
            print(result)
        else
            result ← sequence(n-1) + sequence(n-2)
            print(result)
End

```

(15/100)

3. (a) Andaikan bahawa R_1 dan R_2 ialah hubungan-hubungan ke atas set X , A_1 ialah matriks untuk hubungan R_1 relatif kepada sebahagian urutan X , dan A_2 ialah matriks untuk hubungan R_2 relatif kepada urutan yang sama daripada X . Misalkan matriks A yang mempunyai unsur ke- ij bersamaan dengan 0, jika unsur ke- ij daripada kedua-dua A_1 dan A_2 ialah 0.

(i) Buktikan bahawa A ialah matriks bagi $R_1 \cup R_2$.

(15/100)

(ii) Andaikan matriks bagi hubungan R_1 ke atas $\{1,2,3\}$ ialah $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relatif kepada urutan 3,2,1, dan matriks bagi hubungan R_2 ke

atas $\{1,2,3\}$ ialah $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relatif kepada urutan 3,2,1. Cari matriks daripada hubungan A kepada urutan 1,2,3.

(10/100)

(iii) Tentukan sama ada $R = R_1 \cup R_2$ ialah hubungan setara.

(15/100)

- (b) Cari notasi 'theta' bagi kes terburuk masa yang diperlukan oleh algoritma berikut:

```

Iskey(s, n, key) {
  for i = 1 to n
    for j = i to n
      if (si + sj == key)
        return 1
      else
        return 0
}

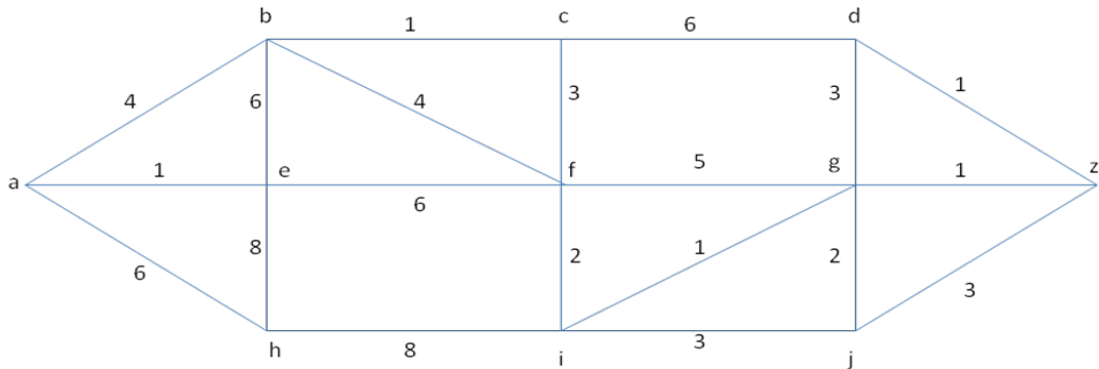
```

(15/100)

- (c) Diberi fungsi f ditakrif oleh $f(x) = \lceil x \rceil - 1$ dan domain fungsi f ialah set nombor nyata. Tentukan sama ada f adalah bersifat bijeksi.

(15/100)

- (d) Gunakan algoritma Dijkstra untuk mencari panjang laluan terpendek dari a ke z dalam graf berpemberat berikut. Tunjukkan jalan kerja anda.



(30/100)

4. (a) Lukis pepohon huraian bagi pernyataan aljabar $((A + B * (C + D) * E) - (A + B) * C - D)$.

(20/100)

- (b) Masa lengah bagi satu paket yang melalui empat buah penghala (a, b, c, d) diberi dalam jadual berikut:

Dari \ Ke	a	b	c	d
a	-	1 msec	2 msec	-
b	2 msec	-	-	5 msec
c	-	2 msec	-	-
d	5 msec	5 msec	2 msec	-

- (i) Lukis digraf hubungan daripada maklumat yang diberi oleh jadual di atas.

(10/100)

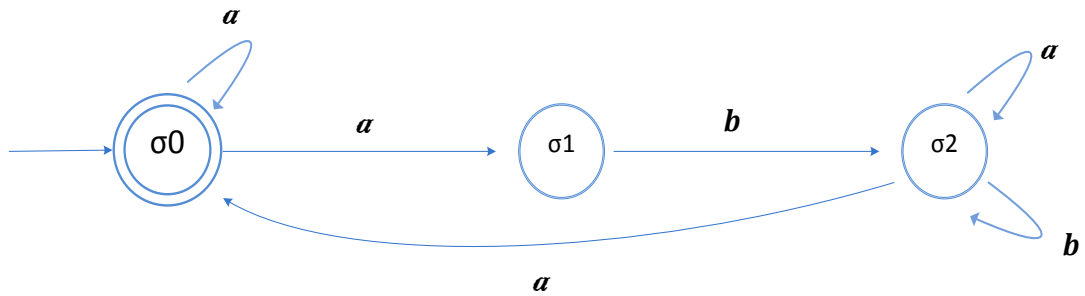
- (ii) Hubungan R atas set $\{a, b, c, d\}$ didefinisikan seperti yang berikut: " xRy jika masa lengah dari penghala x ke panghala y lebih daripada 3 ms". Tuliskan hubungan R dalam bentuk matriks.

(10/100)

- (iii) Berdasarkan jadual masa lengah yang diberi di atas, tulis satu perwakilan matriks bagi hubungan H di mana hubungan H ditakrif seperti berikut: " xHy jika wujud suatu laluan dengan panjang satu atau laluan dengan panjang dua dari penghala x ke penghala y ".

(10/100)

(c) Diberi mesin keadaan terhingga tak berketentuan berikut:



- (i) Cari set masukan V , set keadaan yang boleh diterima T , set keadaan S dan keadaan awal bagi mesin tersebut. (10/100)
- (ii) Tulis jadual peralihan bagi mesin tersebut. (10/100)
- (iii) Tulis tatabahasa struktur frasa termudah, $G=(V,T,S,P)$, bagi mesin tersebut. (10/100)
- (iv) Tulis semula tatabahasa yang dijumpai dalam soalan 4(c)(iii) dalam notasi BNF. (10/100)
- (v) Adakah rentetan *aabaaba* satu rentetan yang diterima oleh mesin keadaan terhingga tersebut? (10/100)