

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

ZMC 110/4 - Kalkulus dan Aljabar Linear

Masa : (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab KESEMUA ENAM soalan.

Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Nyatakan domain dan julat bagi fungsi-fungsi ini.

(i) $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$

(ii) $f(x) = \sqrt{(x-3)(4-x)}$

(iii) $h(x) = e^{\sqrt{x}} + \ln x$

(30/100)

(b) Tunjukkan sama ada fungsi-fungsi yang berikut ganjil atau genap.

(i) $g(x) = \frac{x^2}{1 - |x|}$

(ii) $f(x) = \tan x + x$

(iii) $F(x) = \sqrt{3 + |x|}$

(iv) $h(x) = 1 - \sin |x|$; $x \in [-2\pi, 2\pi]$

(40/100)

(c) Jika

$$f(x) = \frac{|x| - x}{x}$$

tentukan had-had yang berikut:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(30/100)

2. (a) Jika

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 6x - 7}}$$

cari asimtot mengufuk dan menegak bagi graf $f(x)$ dan lakarkan graf tersebut.

(20/100)

(b) Cari ekstrema tempatan dengan menggunakan ujian terbitan kedua bagi fungsi-fungsi yang berikut:

(i) $f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$

(ii) $h(x) = x^{2/3}(x-4)^2$

(30/100)

(c) Nyatakan domain bagi

$$f(x) = (1-x)e^x$$

Kemudian dapatkan ekstrema-ekstrema tempatan, dan selang-selang di mana $f(x)$ meningkat dan menurun. Nyatakan kecengkungan graf $f(x)$ dan cari titik lengkung balas jika ada. Lakarkan graf $f(x)$.

(50/100)

3. (a) Nilaikan kamiran-kamiran yang berikut:

(i) $\int \frac{\sin^2 \pi x}{\cos^6 \pi x} dx$

(ii) $\int (2^x + x^2)^2 dx$

(iii) $\int \frac{(2+x)}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx$

(iv) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x}$

(40/100)

(b) Lakarkan kawasan yang dibatas oleh $y = 1 - |x|$

dan $y = 0$. Kemudian kira isipadu pepejal yang terhasil apabila kawasan ini dikisar melalui paksi x .

(30/100)

(c) Kirakan kamiran-kamiran tak wajar yang diberikan:

(i) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16 + x^2}$

(30/100)

4. (a) Cari had-had yang berikut dengan menggunakan petua L'Hôpital.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - (a+1)^x}{x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1} x}{\sin^3 x}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^k}{x}$

(40/100)

(b) Dengan menggunakan ujian nisbah, tentukan sama ada siri-siri yang diberikan di bawah menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!(2k)!}{(3k)!}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$

(30/100)

(c) Gunakan ujian siri berselang atau ujian lain untuk menentukan sama ada siri-siri infinit berikut menumpu atau mencapah:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\ln k}$

(30/100)

...4/-

5. (a) Cari pembezaan separa yang dinyatakan dengan menggunakan petua rantaian.

(i) $u = xe^{-y}$; $x = \tan^{-1}(rst)$; $y = \ln(3rs + 5st)$.

Dapatkan $\frac{\partial u}{\partial r}$; $\frac{\partial u}{\partial s}$.

(ii) $u = x^2 + y^2 + z^2$; $x = r \sin \phi \cos \theta$;

$y = r \sin \phi \sin \theta$; $z = r \cos \theta$.

Dapatkan $\frac{\partial u}{\partial r}$; $\frac{\partial u}{\partial \phi}$.

(60/100)

(b) Dengan menggunakan pembezaan tersirat cari $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ bagi yang berikut:

(i) $ye^{xyz} + \cos(3xz) = 5$

(ii) $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$

(20/100)

(c) Air mengalir ke dalam suatu tong yang berbentuk silinder bulat yang tegak lurus dengan kadar kecepatan $\frac{4}{3}\pi \text{ m}^3/\text{s}$. Tong ini pula membesar di mana jejaringnya bertambah dengan kadar 0.002 m/s. Berapakah kadar kecepatan ketinggian air di dalam tong tersebut meningkat jika jejari tong 2 m dan isipadunya pula ialah $2\pi \text{ m}^3$?

(20/100)

6. (a) Pertimbangkan tiga matriks di bawah ini:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Kirakan:

(i) $A^t + B$

(iii) B^{-1}

(ii) $A^t C$

(iv) $\det A + \det B$

(v) $\det (AB)^t$

(50/100)

(b) Selesaikan sistem persamaan linear yang berikut:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 7$$

dengan menggunakan petua Cramer.

(50/100)

- oooOooo -