

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1992/93

April 1993

ZMC 110/4 - Kalkulus dan Aljabar Linear

Masa : (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua ENAM soalan.

Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Selesaikan ketaksamaan-ketaksamaan yang berikut:-

(i) $\frac{2}{|x+3|} < 1$

(ii) $(x-4)(x+2) > 0$

(20/100)

(b) Tentukan domain dan julat bagi fungsi-fungsi yang dinyatakan:-

(i) $F(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^2-4}$

(ii) $\phi(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x}}$

(iv) $\phi(x) = \frac{x}{|x| + 1}$

(v) $f(x) = \ln(\ln x)$

(vi) $f(x) = \sqrt{1 + \ln x}$

(50/100)

(c) Diberi:-

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , & x \leq -1 \\ -x & , & -1 < x < 0 \\ x/(2-x) & , & 0 < x < 2 \\ 1 & , & x \geq 2 \end{cases}$$

Tentukan sama ada fungsi di atas berselanjat atau tidak di $x = -1, 0, \text{ dan } 2$. Jika tidak selanjat nyatakan sebabnya. Lakarkan graf $f(x)$.

(30/100)

2. (a) Diberi:-

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9} \sqrt{x}$$

Cari ekstrema tempatan, titik lengkok balas, selang di mana f meningkat dan menurun, selang di mana graf f cengkung ke atas atau ke bawah, dan lakarkan graf $f(x)$.

(50/100)

(b) Lakarkan kawasan yang dibatasi oleh lengkungan-lengkungan

$$y = e^x, y = e, y = x \text{ dan } x = 0.$$

Kemudian cari luas kawasan tersebut.

(30/100)

(c) Sebutir batu dijatuhkan ke dalam satu kolam berair tenang. Ini menghasilkan ombak kecil berbentuk bulatan di mana jejariya meningkat secara malar dengan kadar 0.5 m/s. Berapakah kecepatan luas yang dilengkungi oleh ombak itu meningkat pada akhir 10 saat setelah batu dicampak?

(20/100)

3. (a) Nilaikan kamiran-kamiran tentu yang berikut:-

$$(i) \int_0^1 \frac{5p\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx ; \quad p - \text{pemalar}$$

$$(ii) \int_1^2 \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}}$$

$$(iii) \int_0^{\pi/4} \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} dx$$

(40/100)

(b) Selesaikan kamiran-kamiran tak tentu di bawah:-

$$(i) \int (\ln x)^2 dx$$

$$(ii) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

$$(iii) \int \frac{2 + (\ln x)^2}{x(1 - \ln x)} dx$$

$$(iv) \int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx$$

$$(v) \int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} dx$$

(60/100)

4. (a) Gunakan ujian punca atau ujian nisbah untuk menentukan sama ada siri-siri yang berikut menumpu atau mencapah.

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! 10^k}{3^k}$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$$

$$(iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3+1}$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k+1)^{2k}}{(5k^2+1)^k}$$

(50/100)

- (b) Bagi tiap-tiap siri berselang yang diberikan, tunjukkan sama ada siri tersebut menumpu secara mutlak atau mencapah. Gunakan apa-apa ujian yang sesuai.

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{3^k}$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{e^k}$$

$$(iii) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$$

...4/-

$$(iv) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}}$$

(50/100)

5. (a) Tentukan had-had yang berikut dengan menggunakan petua L'Hopital:-

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad a > 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \tan x) \sec 2x$$

(30/100)

- (b) Nilaikan kamiran-kamiran tak wajar yang diberikan di bawah:-

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$(ii) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-x}}} dx$$

(30/100)

- (c) Cari pembezaan bagi fungsi-fungsi di bawah:-

$$(i) h(x) = (\ln \sin x)e^x$$

$$(ii) f(x) = (x)(x)^x$$

$$(iii) g(x) = \frac{(x^2+1)^3 (2x-5)^2}{(x^2 + 5)^2}$$

(Gunakan apa-apa teknik yang sesuai).

(40/100)

...5/-

6. (a) Pertimbangkan matriks yang berikut:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Cari matriks asas E supaya $EA = C$.

(10/100)

(b) Anggap

$$\det = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 10$$

cari

$$(i) \det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$(ii) \det \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$(iii) \det \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

(30/100)

(c) (i) Jika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

dapatkan $\text{adj}(A)$ dan A^{-1} .

(ii) Tentukan nilai-nilai x , y , dan z dengan menggunakan petua Cramer.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(60/100)