UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

ZSC 310/3 Kaedah Matematik III

Masa : [3 jam]

Jawab EMPAT soalan sahaja.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

Operator Laplace ∇^2

Koordinat silinderan: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Koordinat sferaan: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

1. (a) Tunjukkan bagaimana persamaan Bessel

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J(x) + x \frac{d}{dx} J(x) + (x^2 - m^2) J(x) = 0$$

boleh diterbitkan daripada persamaan Laplace.

Bagi m = 0 dapatkan satu penyelesaian siri kuasa terhadap x = 0.

(60/100)

(b) Taburan suhu yang diketahui $U(a,\theta,\phi) = g(\theta)$ dipaksakan di seluruh permukaan sesuatu sfera pepejal yang berjejari a. Taburan suhu $U(r,\theta,\phi)$ di pendalaman sfera pada keadaan mantap mematuhi persamaan Laplace. Huraikan dengan bantuan persamaan-persamaan yang sewajar bagaimana taburan suhu pada sebarang titik pendalaman ditetapkan.

(40/100)

...2/-

2. (a) Fungsi penjanaan bagi polinomial Chebyshev jenis kedua $U_n(x)$ ialah $\Phi(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=o}^{\infty} U_n(x)t^n$.

Tunjukkan formula penjumlahan

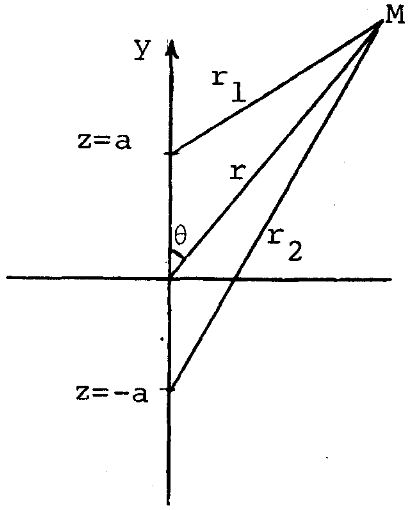
$$U_n(x) = \sum_{\beta=o}^{n} P_\beta(x)\, P_{n-\beta}(x)$$

Nilaikan kamilan

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)dx$$

(30/100)

(b) Dua cas $-q$ dan q masing-masing terletak pada $z = -a$ dan $z = a$. Bagi $r > a$ tunjukkan bahawa keupayaan elektrik pada titik M ialah



$$\phi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_o r} \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)$$

Sebaliknya kalau $r < a$ terbitkan ϕ juga.

Bagi masalah empat cas yang sama yang masing-masing terletak dipenjuru suatu segi empat tepat bagaimana keupayaan di kawasan pendalaman segi empat boleh didapati? Apakah keputusan yang dijangka.

(70/100)

3. Model petala nukleus menganggapkan bahawa nukleon bergerak di dalam suatu keupayaan $V(r,\theta,\phi) = \infty$ bagi $r > a$ dan O bagi $O \leq r < a$. Persamaan Schrödinger bagi nukleon ialah

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi)$$

dan syarat sempadan sewajar ialah

$$\psi(r=a) = O, \quad \psi(r<a) \text{ mesti terhingga}$$

Bincangkan penyelesaian $\psi(r,\theta,\phi)$ dan dapatkan tenaga E bagi nukleon.

(100/100)

4. (a) Tunjukkan bahawa transform sinus Fourier bagi e^{-at} ialah

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\omega}{\omega^2+a^2}$$

(20/100)

(b) Kembangkan $f(x) = |\sin x|$ sebagai suatu siri Fourier dan tunjukkan bahawa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

(30/100)

(c) Carilah penyelesaian lengkap bagi persamaan pembezaan yang berikut

$$y'' + 4y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}|\sin x|$$

(30/100)

(d) Kembangkan fungsi delta Dirac $\delta(x)$ sebagai suatu siri Legendre.

(20/100)

5. (a) Dapatkan transform Laplace bagi cos 3t dan sin 4t.

(20/100)

(b) Carilah transform Laplace bagi y(t) yang mematahi persamaan

$$y = 1 - \frac{d^2y}{dt^2}$$

tertakluk kepada syarat $y(t=0) = 1$ dan $Y'(t=0) = 0$.

Kalau suatu penyelesaian khusus bagi persamaan pembezaan tersebut ialah $y = 1 - \cos t + \sin t$, tetapkan syarat-syarat awal.

(40/100)

...4/-

(c) Selesaikan set persamaan pembezaan berikut melalui transform Laplace

$$\frac{dx}{dt} = \alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha x \qquad ; \qquad \alpha = \text{pemalar}$$

dan tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \text{pemalar}$$

(40/100)

- oooOooo -