

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1989/90

Mac/April 1990

ZMC 211/3 Kaedah Matematik II

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan itu.

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.

Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Bezakan

$$\frac{\underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{a}}}{\underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{a}}}$$

di sini $\underline{\underline{a}}$ ialah suatu vektor malar dan $\underline{\underline{r}} \equiv \underline{\underline{r}}(t)$.

(10/100)

(b) Cari terbitan hasil darab $\underline{\underline{r}} \times \underline{\underline{s}}$ dan simpulkan bahawa

$$\frac{d}{dt} (\underline{\underline{r}} \times \frac{d\underline{\underline{r}}}{dt}) = \underline{\underline{r}} \times \frac{d^2\underline{\underline{r}}}{dt^2}$$

(10/100)

(c) Buktikan $\nabla r^n = nr^{n-2} \underline{\underline{r}}$.

(20/100)

(d) Buktikan bahawa $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$.

(30/100)

(e) Buktikan

$$\underline{\underline{v}} = (x + 3y)\underline{\underline{i}} + (y - 2z)\underline{\underline{j}} + (x + az)\underline{\underline{k}}$$

merupakan suatu vektor solenoidal apabila $a = -2$.

(20/100)

(f) Jika u ialah suatu fungsi (x, y, z) yang terbezakan, buktikan $\nabla u \cdot d\underline{\underline{r}} = du$.

(10/100)

2. (a) Beri takrif terbitan berarah bagi suatu fungsi $\phi(x,y,z)$ pada suatu titik P yang terletak atas lengkung c. (5/100)
- (b) Tunjukkan bahawa terbitan berarah fungsi skalar $\phi(x,y,z)$ mengikut arah lengkung c boleh diungkapkan sebagai

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \nabla \phi \cdot \underline{\underline{T}}$$

di sini $\underline{\underline{T}}$ ialah vektor target unti dengan c. (10/100)

- (c) Tunjukkan bahawa magnitud dan arah $\nabla \phi$ tidak bersandar pada sistem koordinat. Iaitu tunjukkan bahawa magnitud $\nabla \phi$ yang ditandakan dengan $|\nabla \phi|$ adalah sama dengan nilai maksimum terbitan berarah bagi $\phi(x,y,z)$ dan arahnya adalah mengikut kadar pertambahan maksimum fungsi $\phi(x,y,z)$. (10/100)

- (d) Cari terbitan berarah bagi $\phi = x^2yz + 4xz^2$ pada $(1,-2,-1)$ mengikut arah $2\underline{\underline{i}} - \underline{\underline{j}} - 2\underline{\underline{k}}$. (15/100)

- (e) Buktikan

(i) $\nabla \times \nabla \phi = \underline{\underline{0}}$

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}$

(40/100)

- (f) Tunjukkan bahawa $(\underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{V}}) \underline{\underline{V}} = \frac{1}{2} \nabla V^2 - \underline{\underline{V}} \times \nabla \times \underline{\underline{V}}$.

Diberi $\nabla(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{A}} \times (\nabla \times \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{B}} \times (\nabla \times \underline{\underline{A}}) + (\underline{\underline{A}} \cdot \nabla) \underline{\underline{B}} + (\underline{\underline{B}} \cdot \nabla) \underline{\underline{A}}$

(10/100)

- (g) Jika $\underline{\underline{r}}$ ialah vektor kedudukan, tunjukkan bahawa $(\underline{\underline{f}} \cdot \nabla) \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{f}}$, di sini $\underline{\underline{f}}$ ialah sebarang vektor.

(10/100)

3. (a) Dengan menggunakan takrif kamilan bagi kecapahan, iaitu

$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

dapatkan formula

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

di sini ΔV ialah isipadu rantau R yang dibatasi oleh oleh permukaan tertutup S . Isipadu ΔV mengandungi titik yang padanya kecapahan $\nabla \cdot \vec{f}$ dinilai apabila ΔV mendekati sifar.

(60/100)

- (b) Beri tafsiran fizik bagi $\nabla \cdot \vec{f}$ seperti ditakrifkan di dalam (a).

(10/100)

(c) Buktikan
$$\iiint_V \nabla \phi \, dV = \iint_S \phi \, \vec{n} \, ds$$

(30/100)

4. (a) Nyatakan teorem Stokes dan beri tafsiran fizik baginya.

(10/100)

- (b) Tentusahkan teorem Stokes untuk vektor $F = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ diambil di atas setengah sfera $\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 = a^2$ yang terletak di atas satah xy .

(45/100)

- (c) Sistem koordinat sfera ditakrifkan oleh transformasi

$$x = u \sin v \cos w, \quad y = u \sin v \sin w, \quad z = u \cos v$$

di sini $u \geq 0, 0 \leq v < \pi, 0 \leq w < 2\pi$.

- (i) Tentukan Jacobian bagi transformasi.

(5/100)

- (ii) Cari faktor skala h_u, h_v, h_w dan vektor unit $\tilde{e}_u, \tilde{e}_v, \tilde{e}_w$ bagi sistem koordinat sfera ini.
(30/100)
- (iii) Buktikan sistem koordinat sfera itu adalah suatu sistem berotogon.
(10/100)

- ooo0ooo -