UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1990/91

Mac/April 1991

ZMC 211/3 Kaedah Matematik II

Masa : (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Cari sudut antara vektor $\underline{R}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ dan $\underline{R}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ dengan menggunakan hasil darab silang. (15/100)

(b) Tunjukkan jika tiga vektor $\underline{A}$, $\underline{B}$ dan $\underline{C}$ mematuhi hubungan $\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = \underline{O}$, maka

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{C} \wedge \underline{A}$$ (15/100)

(c) Jika $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ dan $r = |\underline{r}|$, tunjukkan bahawa

(i) $\text{grad } f(r) = f'(r) \dfrac{\underline{r}}{r}$

(ii) $\text{curl } \left(\dfrac{\underline{r}}{r^2}\right) = \underline{O}$ (30/100)

(d) Jika $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ dan $\underline{\nabla} r^n = nr^{n-2}\,\underline{r}$, buktikan bahawa

$$\underline{\nabla} \wedge \left(\frac{\underline{a} \wedge \underline{r}}{r^3}\right) = 3\left(\frac{\underline{a} \cdot \underline{r}}{r^5}\right)\underline{r} - \frac{\underline{a}}{r^3}$$

di mana $\underline{a}$ adalah vektor malar.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Identiti untuk vektor } \underline{A},\ \underline{B} \text{ dan } \underline{C} \\ \qquad (\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge \underline{C} = (\underline{A}.\underline{C})\underline{B} - (\underline{B}.\underline{C})\underline{A} \\ \text{Identiti untuk } \underline{\nabla} \\ \qquad \underline{\nabla} \wedge (\phi \underline{A}) = \phi(\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) - \underline{A} \wedge (\underline{\nabla}\phi) \end{array}\right]$$ (40/100)

...2/-

2. (a) Diberi ruang lengkung $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$, cari

(i) Vektor tangen unit $\underline{T}$

(ii) Kelengkungan, k

(iii) Jejari kelengkungan, ρ

(iv) Vektor Normal utama, $\underline{N}$

(v) Vektor Binormal, $\underline{B}$

dan (vi) Kilasan (torsion), τ (50/100)

(b) Buktikan bahawa pecutan $\underline{a}$ untuk sesuatu jasad yang melalui satu garis lengkung boleh ditulis sebagai

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt}\,\underline{T} + \frac{v^2}{\rho}\,\underline{N}$$

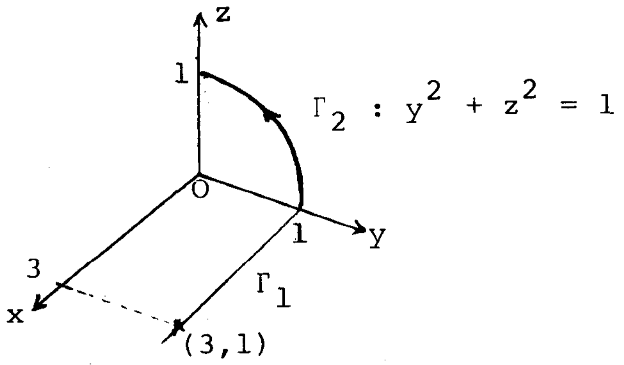
di mana v ialah kelajuan zarah tersebut. (20/100)

(c) Nilaikan kamilan garisan

$$\int_{\Gamma} (3x - 2y + z)\, ds$$

di mana Γ ialah garis lengkung yang terdiri daripada dua bahagian seperti yang ditunjukkan dalam rajah 1.

[Petunjuk: Lengkungan Γ_1 diparameterkan oleh
$\Gamma_1 : \underline{r}_1(t) = -3t\,\hat{i} + \hat{j}$, $-1 \leq t \leq 0$]



(30/100)

Rajah 1

3. (a) Nilaikan $\int_{\Gamma} \underline{F}.d\underline{R}$ di mana $\underline{F} = (x-z)\hat{i} + (1-xy)\hat{j} + y\hat{k}$

dan Γ ialah lintasan

(i) garis lurus dari (0,0,0) ke (1,1,1) dan

(ii) garis lengkung yang diberikan oleh persamaan berparameter $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ dari (0,0,0) ke (1,1,1). (30/100)

(b) Nilaikan $\iint_S \underline{A}.\underline{n}\ dS$ di mana $\underline{A} = z\hat{i} + x\hat{j} - 3y^2z\hat{k}$

dan S ialah permukaan silinder $x^2 + y^2 = 16$ yang terletak di dalam oktan pertama antara $z = 0$ dan $z = 5$. (40/100)

(c) Jika $\phi = xy$, nilaikan $\iiint_V \phi\, dv$ di mana v ialah isipadu yang dibatasi oleh satah $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dan $3x + 2y + z = 6$. (30/100)

4. (a) (i) Nyatakan teorem Green.

(ii) Tentusahkan teorem Green dalam satah untuk $\oint_{\Gamma} (xy + y^2)dx + x^2dy$ di mana Γ ialah lengkungan tertutup yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = x^2$. (30/100)

(b) (i) Dengan menggunakan teorem Gauss, buktikan

$$\iiint_V \underline{\nabla}\, \phi\, dv = \iint_S \phi\, \hat{n}\, dS$$

(ii) Nilaikan $\iint_S \underline{F}.\hat{n}\ dS$, di mana $\underline{F} = 4\,x\,z\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ dan S ialah permukaan kubus yang dibatasi oleh $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ dan $z = 1$. (40/100)

...4/-

(c) Dengan menggunakan teorem Stokes, nilaikan kamilan permukaan $\iint_S (\text{curl } \underset{\sim}{F}) \cdot \hat{n} \, dS$ di mana $\underset{\sim}{F}(x,y,z) = (1-z)y\,\hat{i} + ze^x\,\hat{j} + x \sin z\,\hat{k}$ dan S ialah hemisfera $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ dan $\hat{n}$ mempunyai komponen positif z.

(30/100)

- oooOOooo -