
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2009/2010 Academic Session

April/May 2010

MSG 356 – Mathematical Programming
[Pengaturcaraan Matematik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all eight** [8] questions.

Arahan : Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. A company produces three models (A, B and C) of a certain product using two types of raw material (I and II), of which 5000 and 8000 units are available, respectively. The raw material requirements per unit of the three models are given in the table below.

Raw Material	Requirements per Unit of Given Model		
	A	B	C
I	3	4	2
II	5	4	6

The labour time for each unit of model A is twice that of model B and three times that of model C. The entire labour force of the factory can produce the equivalent of 1200 units of model A. A market survey indicates that the minimum demand for the three models is 250, 300 and 100, respectively. If the company produces x_1 units of model A, x_2 units of model B and x_3 units of model C, then it can charge RM($800 - 2x_1$)/unit, RM($1,000 - 4x_2$)/unit and RM($900 - 3x_3$)/unit of the models A, B and C, respectively. The fixed cost of production is RM5,000.

Formulate the problem as a nonlinear programming model to determine the number of units of each model that will maximize profit.

[25 marks]

2. Consider the following nonlinear function:

$$f(x) = 48x - 15x^2 + x^3$$

- Determine whether $f(x)$ is convex, concave, or neither.
- Find the local minima and local maxima of $f(x)$.
- What is the minimum value of $f(x)$ for $1 \leq x \leq 3$?

[25 marks]

3. Consider the following unconstrained nonlinear programming problem:

$$\text{Maximize } f(x, y) = 8x - x^2 + 2xy - 12y - 2y^2.$$

- Use the method of steepest ascent with two iterations to approximate the optimal solution to the problem. Begin at the point (0, 0).
- Solve the problem directly to obtain the exact solution.

[25 marks]

1. Sebuah syarikat menghasilkan tiga model (A, B dan C) bagi suatu keluaran menggunakan dua jenis bahan mentah (I dan II), yang mana sejumlah 5000 unit bahan mentah I dan 8000 unit bahan mentah II boleh didapati. Keperluan bahan mentah per unit bagi setiap model diberikan dalam jadual di bawah.

Bahan Mentah	Keperluan per Unit bagi Setiap Model		
	A	B	C
I	3	4	2
II	5	4	6

Masa kerja bagi penghasilan setiap unit model A adalah dua kali berbanding masa kerja untuk model B dan tiga kali berbanding masa kerja untuk model C. Keseluruhan tenaga kerja adalah setara dengan penghasilan 1200 unit model A. Suatu tinjauan pasaran menunjukkan permintaan minimum ketiga-tiga model masing-masing adalah sebanyak 250, 300 dan 100 unit. Jika syarikat menghasilkan x_1 unit model A, x_2 unit model B dan x_3 unit model C, maka ia dapat mengenakan bayaran sebanyak $RM(800 - 2x_1)/\text{unit}$, $RM(1,000 - 4x_2)/\text{unit}$ dan $RM(900 - 3x_3)/\text{unit}$ masing-masing bagi model-model A, B dan C. Kos tetap pengeluaran adalah sebanyak RM5,000.

Rumuskan masalah ini sebagai suatu masalah pengaturcaraan tak linear untuk menentukan bilangan unit setiap model yang memaksimumkan keuntungan.

[25 markah]

2. Pertimbangkan fungsi tak linear berikut:

$$f(x) = 48x - 15x^2 + x^3$$

- (a) Tentukan sama ada $f(x)$ cembung, cekung atau bukan kedua-duanya.
- (b) Cari minimum setempat dan maksimum setempat bagi $f(x)$.
- (c) Apakah nilai minimum $f(x)$ bagi $1 \leq x \leq 3$?

[25 markah]

3. Pertimbangkan masalah pengaturcaraan tak linear tanpa kekangan berikut:

$$\text{Maksimumkan } f(x, y) = 8x - x^2 + 2xy - 12y - 2y^2.$$

- (a) Gunakan kaedah pendakian tercuram dengan dua lelaran untuk menganggarkan penyelesaian optimum bagi masalah tersebut. Mulakan pada titik (0, 0).
- (b) Selesaikan masalah tersebut secara langsung untuk mendapatkan penyelesaian tepat.

[25 markah]

4. Solve the following nonlinear programming problem:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \\ \text{subject to } & 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{aligned}$$

[25 marks]

5. Use the Kuhn-Tucker conditions to find the optimal solution to the following nonlinear programming problem:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x_1, x_2) = x_1 - 1^2 + 3x_2 - 2^2 - 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to } & 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 10 \end{aligned}$$

[25 marks]

6. Your friend is considering investing RM3,000 in four stocks. Let R_i be the random variable representing the annual return on RM1 invested in stock i ($i = 1, 2, 3, 4$). Hence, if $R_i = 0.10$, RM1 invested in stock i at the beginning of a year would be worth RM1.10 at the end of the year. You have the following information:

$$\begin{aligned} E(R_1) &= 0.08, E(R_2) = 0.15, E(R_3) = 0.20, E(R_4) = 0.12, \\ \text{Var}(R_1) &= 0.10, \text{Var}(R_2) = 0.20, \text{Var}(R_3) = 0.15, \text{Var}(R_4) = 0.08, \\ \text{Cov}(R_1, R_2) &= 0.04, \text{Cov}(R_1, R_3) = 0.02, \text{Cov}(R_1, R_4) = 0.05, \\ \text{Cov}(R_2, R_3) &= 0.03, \text{Cov}(R_2, R_4) = 0.06, \text{Cov}(R_3, R_4) = 0.01. \end{aligned}$$

Formulate a quadratic programming model that can be used to help her find the portfolio that attains an expected annual return of at least 15% and minimize the variance of the annual return on the portfolio.

[25 marks]

7. Consider the following separable programming problem:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 + x_2 - 4 \\ \text{subject to } & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

By choosing $x_1 = x_2 = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ as the grid points for piecewise linear functions, develop an approximating linear programming problem to the problem above. Do not solve the approximating problem.

[25 marks]

...5/-

4. Selesaikan masalah pengaturcaraan tak linear berikut:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimumkan} & f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \\ \text{terhadap} & 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{array}$$

[25 markah]

5. Gunakan syarat-syarat Kuhn-Tucker bagi mencari penyelesaian optimum kepada masalah pengaturcaraan tak linear berikut:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimumkan} & f(x_1, x_2) = x_1 - 1^2 + 3x_2 - 2^2 - 2x_1 + x_2 \\ \text{terhadap} & 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 10 \end{array}$$

[25 markah]

6. Rakan anda sedang membuat pertimbangan untuk melabur sebanyak RM3,000 dalam empat saham. Biarkan R_i sebagai pembolehubah rawak mewakili pulangan tahunan apabila RM1 dilaburkan dalam saham i ($i = 1, 2, 3, 4$). Jadi, jika $R_i = 0.10$, RM1 yang dilaburkan dalam saham i pada permulaan sesuatu tahun akan bernilai RM1.10 pada penghujung tahun tersebut. Anda mempunyai maklumat berikut:

$$\begin{aligned} E(R_1) &= 0.08, E(R_2) = 0.15, E(R_3) = 0.20, E(R_4) = 0.12, \\ \text{Var}(R_1) &= 0.10, \text{Var}(R_2) = 0.20, \text{Var}(R_3) = 0.15, \text{Var}(R_4) = 0.08, \\ \text{Cov}(R_1, R_2) &= 0.04, \text{Cov}(R_1, R_3) = 0.02, \text{Cov}(R_1, R_4) = 0.05, \\ \text{Cov}(R_2, R_3) &= 0.03, \text{Cov}(R_2, R_4) = 0.06, \text{Cov}(R_3, R_4) = 0.01. \end{aligned}$$

Rumuskan suatu model pengaturcaraan kuadratik yang boleh digunakan untuk membantu rakan anda mendapatkan portfolio yang mencapai jangkaan pulangan tahunan sekurang-kurangnya 15% dan meminimumkan varians pulangan tahunan portfolio.

[25 markah]

7. Pertimbangkan masalah pengaturcaraan terpisahkan berikut:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimumkan} & f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 + x_2 - 4 \\ \text{terhadap} & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Dengan memilih $x_1 = x_2 = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ sebagai titik-titik pecahan bagi fungsi linear cebis-demi-cebis, bina masalah penghampiran pengaturcaraan linear kepada masalah di atas. Jangan selesaikan masalah penghampiran ini.

[25 markah]

8. Pinang Airlines may schedule 5 flights per day departing from Penang. The destinations of each flight are Langkawi, Kuala Lumpur and Johor Bahru. The contribution to the company's profit from any given number of daily flights from Penang to each destination is shown in the table below.

Destination	Profit per Flight (thousand \$)				
	Number of Flights				
	1	2	3	4	5
Langkawi	10	12	15	18	20
Kuala Lumpur	12	14	16	20	25
Johor Bahru	15	18	20	25	30

Use dynamic programming to find the optimal number of flights that should depart Penang for each destination.

[25 marks]

8. *Pinang Airlines* boleh menjadualkan 5 penerbangan setiap hari daripada Pulau Pinang. Destinasi-destinasi setiap penerbangan adalah Langkawi, Kuala Lumpur dan Johor Bahru. Sumbangan kepada keuntungan syarikat bagi setiap bilangan penerbangan harian daripada Pulau Pinang ke setiap destinasi ditunjukkan dalam jadual di bawah.

<i>Destinasi</i>	<i>Keuntungan Setiap Penerbangan (ribu \$)</i>				
	<i>Bilangan Penerbangan</i>				
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>Langkawi</i>	<i>10</i>	<i>12</i>	<i>15</i>	<i>18</i>	<i>20</i>
<i>Kuala Lumpur</i>	<i>12</i>	<i>14</i>	<i>16</i>	<i>20</i>	<i>25</i>
<i>Johor Bahru</i>	<i>15</i>	<i>18</i>	<i>20</i>	<i>25</i>	<i>30</i>

Gunakan pengaturcaraan dinamik untuk mendapatkan bilangan penerbangan yang optimum daripada Pulau Pinang ke setiap destinasi.

[25 markah]