UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1988/89

Mac/April 1989

ZSC 310/3 Kaedah Matematik III

Masa : [3 jam]

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Seutas tali panjangnya L diregangkan di antara dua titik (0,0) dan (L,0) di atas paksi x. Pada masa t = 0 tali ini mempunyai bentuk yang diberi oleh f(x), 0 < x < L dan ia dilepaskan daripada keadaan rehat. Cari sesaran tali tersebut y(x,t) pada sebarang masa kemudian.

   Perhatikan persamaan gelombang untuk getaran tali ini ialah:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \begin{array}{c} t > 0 \\ 0 < x < L \end{array}$$

   di sini a ialah suatu pemalar.

(100/100)

2. (a) Gunakan fungsi penjana bagi polinom Hermite, iaitu:

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

   untuk mendapat hubungan jadi semula

   (i) $2nH_{n-1}(x) = H'_n(x)$

   (ii) $2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$

(20/100)

...2/-

(b) Buktikan bahawa polinom Hermite, iaitu $H_n(x)$ memenuhi syarat berortogon

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{jika} \quad m \neq n \\ 2^n (n!)\sqrt{\pi} & \text{jika} \quad m = n \end{cases}$$

(50/100)

(c) Dengan itu buktikan: $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx$

$$= \sqrt{\pi}\,[2^{n-1} n!\,\delta_{m,n-1} + m 2^n (n!)\,\delta_{n,m-1}]$$

(30/100)

[Perhatikan persamaan pembezaan Hermite:

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$$

dan

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2 \quad]$$

3. Persamaan Schrödinger untuk atom hidrogen ialah:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)]\psi = 0$$

di sini $\psi = \psi(x,y,z)$ ialah fungsi gelombang elektron, μ ialah jisim terkurang untuk elektron dan nukleus. $V(r)$ ialah keupayaan Coulomb di antara elektron dan nukleus, iaitu $V(r) = -Ze^2/r$. E ialah jumlah tenaga sistem itu.

Gunakan kaedah pemisahan pembolehubah untuk selesaikan persamaan Schrödinger di dalam koordinat sfera r, θ, ϕ. Dapatkan tiga persamaan pembezaan berkaitan dengan koordinat ini, dan tentukan penyelesaian lengkap bagi fungsi-fungsi berhubungan dengan koordinat θ dan ϕ sahaja.

Perhatikan bahawa persamaan Schrödinger di dalam koordinat sfera ialah:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0$$

Persamaan bersekutu Legendre ialah:

$$\frac{d}{d\rho}\left[(1-\rho^2)\frac{dy}{d\rho}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\rho^2}\right]y = 0$$

dan mempunyai penyelesaian $y = P_\ell^m(\rho)$, memenuhi syarat keortogon

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(\rho)P_{\ell'}^m(\rho)\,d\rho = \begin{cases} 0 & \text{jika} \quad \ell \neq \ell' \\ \dfrac{2}{2\ell+1}\dfrac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} & \text{jika} \quad \ell = \ell' \end{cases}$$

(100/100)

4. (a) Buktikan bahawa $\delta(at) = (1/|a|)\delta(t)$ di sini $\delta(t)$ ialah fungsi delta Dirac.

(30/100)

(b) Buktikan bahawa: $\delta(-t) = \delta(t)$. (5/100)

(c) Cari transformasi Fourier bagi denyutan segiempat tepat, $P(t)$ yang ditakrifkan seperti:

$$P(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tfrac{1}{2}d \\ 0 & |t| > \tfrac{1}{2}d \end{cases}$$

Lukiskan gambarajah berkaitan dengan $P(t)$ dan transformasi Fourier baginya.

(30/100)

(d) Cari transformasi Laplace songsang, iaitu:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$$

Diberi:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$$

(35/100)

313