UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1992/93

April 1993

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik III

Masa : (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Polinom Hermite ditakrifkan oleh fungsi

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

(a) Tunjukkan bahawa

(i) $H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x)$

(ii) $H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x)$

(iii) $H_n'(x) = 2x\, H_n(x) - H_{n+1}(x)$.

(40/100)

(b) Dengan demikian nilaikan kamiran

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x)\, dx$$

di sini

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x)\, dx = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n! \qquad m = n$$
$$= 0 \qquad m \neq n$$

(60/100)

...2/-

2. (a) Kembangkan

$$f(x) \begin{cases} = 0\,, & -\pi < x \leqslant 0 \\ = \dfrac{\pi x}{4} & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

di dalam suatu siri Fourier.

(60/100)

(b) Dengan demikian tunjukkan bahawa

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

(15/100)

(c) Dapatkan transformasi Fourier bagi

$$f(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\varepsilon & |x| \leqslant \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Tentukan transformasi ini apabila $\varepsilon \to 0^+$.

(25/100)

3. Persamaan Schrödinger untuk atom hidrogen diberi oleh

$$\nabla^2\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0$$

di sini $\psi = \psi(x,y,z)$ ialah fungsi gelombang elektron, μ ialah jisim terkurang bagi elektron dan nukleus. $V(r)$ ialah keupayaan Coulomb di antara elektron dan nukleus, iaitu $V(r) = -\dfrac{Ze^2}{r}$. E ialah tenaga penuh sistem tersebut.

Gunakan kaedah pemisahan pembolehubah untuk selesaikan persamaan Schrödinger di dalam koordinat sfera r,θ,ϕ. Dapatkan tiga persamaan pembezaan berkaitan dengan koordinat-koordinat ini dan kemudian tentukan penyelesaikan lengkap bagi fungsi-fungsi berhubungan dengan koordinat θ dan ϕ sahaja.

Ambil perhatian bahawa persamaan Schrödinger di dalam koordinat sfera diberi oleh

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0.$$

Persamaan bersekutu Legendre ialah:

$$\frac{d}{d\rho}\left[(1-\rho^2)\frac{dy}{d\rho}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\rho^2}\right]y = 0$$

dan ini mempunyai penyelesaian $y = P_\ell^m(\rho)$, memenuhi syarat keortogonan.

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(\rho)P_{\ell'}^m(\rho)d\rho = \begin{cases} 0 & \text{jika } \ell \neq \ell' \\ \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} & \text{jika } \ell = \ell' \end{cases}$$

(100/100)

4. Di dalam keadaan pengaliran haba pegun di satah x-y, fungsi taburan suhu $u(x,y)$ menepati persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Tentukan penyelesaian bagi persamaan tersebut dengan menggunakan syarat-sempadan berikut:

$u(x,y) = 0$ pada $x = 0$, $y = 0$ dan $y = b$

$u(x,y) = u_o$ pada $x = d$ dan $0 < y < b$.

(100/100)

Perhatian:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

di sini m dan n boleh mengambil sebarang nilai 1,2,3,....

- oooOooo -