

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1989/90

Mac/April 1990

ZSC 310/3 Kaedah Matematik III

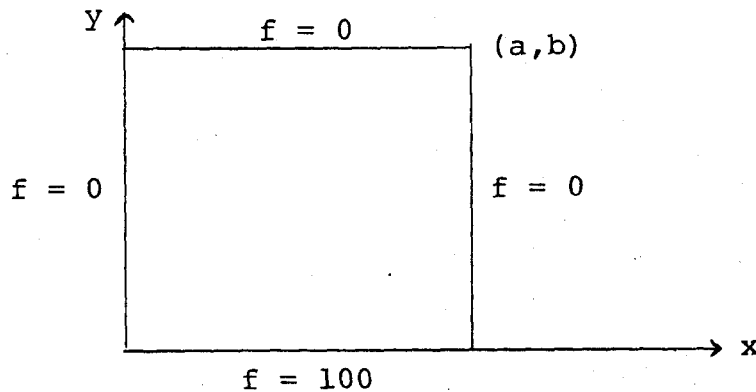
Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan itu.

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.

Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

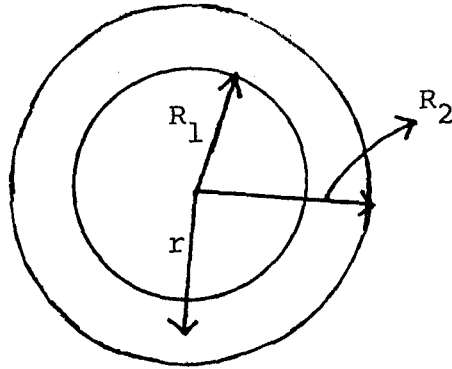
1. (a) Cari penyelesaian persamaan $\nabla^2 f(x,y) = 0$ di dalam plat (Rajah 1) yang menepati syarat-syarat sempadan yang diberikan.



Rajah 1

(50/100)

- (b) Cari taburan suhu $T(r,\theta)$ keadaan mantap dalam rantau $R_1 < r < R_2$ (Rajah 2) yang mematuhi syarat-syarat sempadan $f(R_1,\theta) = T_1$, $f(R_2,\theta) = T_2$ dengan T_1, T_2 adalah pemalar.



Rajah 2

(50/100)

2. Diberi:

persamaan legendre biasa

$$x^2 P_\ell''(x) + 2x P_\ell'(x) - \ell(\ell+1) P_\ell(x) = 0,$$

fungsi penjanaan legendre biasa

$$\phi(x,h) = (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} h^\ell P_\ell(x),$$

dan fungsi penjanaan Bessel

$$\phi(x,h) = e^{x/2(h-1/h)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x) h^n$$

(a) Buktikan

$$(i) \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_n(x) dx = 0 \quad \ell \neq n$$

$$(ii) P_\ell(-1) = (-1)^\ell$$

$$(iii) P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$$

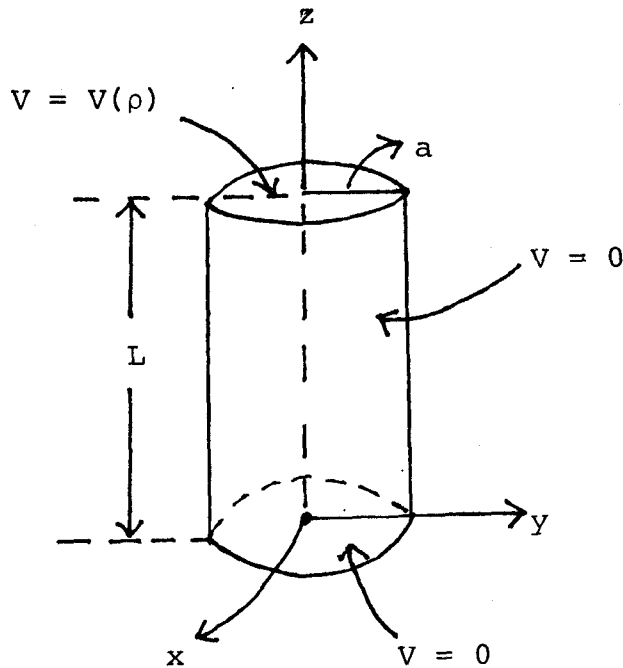
$$(iv) J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$$

(70/100)

(b) Terbitkan satu hubungan jadi semula bagi fungsi Legendre biasa dan fungsi Bessel.

(30/100)

3.



Rajah 3

Penyelesaian am persamaan $\nabla^2 V(\rho, \phi, z) = 0$ ialah gabungan fungsi-fungsi berikut:

$$\begin{Bmatrix} J_n(k\rho) \\ N_n(k\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin n\phi \\ \cos n\phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{-kz} \\ e^{+kz} \end{Bmatrix}$$

Cari penyelesaian $V(\rho, \phi, z)$ di dalam silinder (Rajah 3) yang menepati syarat-syarat sempadan yang diberikan.

(100/100)

4. (a) Terbitkan tiga persamaan pembezaan biasa masing-masing dalam sebutan r , θ , dan ϕ daripada $\nabla^2 f(r, \theta, \phi) = 0$. Diberi

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

(40/100)

- (b) Daripada tiga persamaan pembezaan biasa di atas penyelesaian am diperolehi ialah

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} (A_{\ell, m} r^{\ell} + B_{\ell, m} r^{-\ell-1}) Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$$

Cari penyelesaian di luar sfera berjejari a menepati syarat sempadan $f(a, \theta) = 1 + 3 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta$.

(60/100)

- ooo0ooo -