UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik III

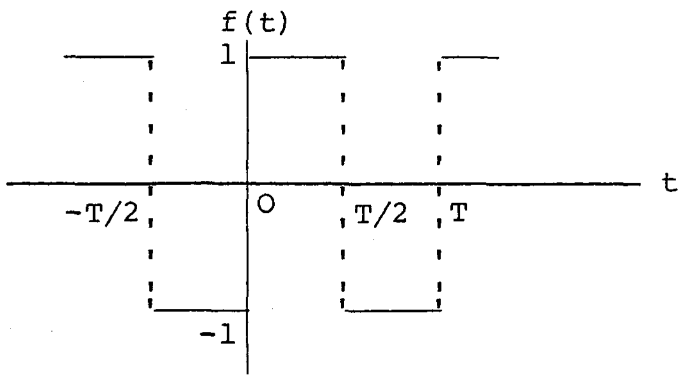
Masa : (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.
Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia

1. (a) Cari siri Fourier untuk fungsi f(t) yang ditakrif oleh

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -T/2 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < T/2 \end{cases}$$

dan $f(t+T) = f(t)$ seperti yang ditunjukkan di dalam rajah di bawah.



(55/100)

(b) Buktikan bahawa $\delta(at) = (1/|a|)\,\delta(t)$ di sini $\delta(t)$ ialah fungsi delta Dirac.

(25/100)

(c) Transformasi Fourier bagi suatu fungsi ditakrif sebagai

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx$$

Tunjukkan bahawa jika f(x) adalah suatu fungsi genap, $F(\alpha)$ menurun kepada

$$F(\alpha) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$$

Demikian tentukan transformasi kosinus Fourier untuk x di antara 0 dan π.

(20/100)

2. Cari penyelesaian u(x,t) bagi persamaan gelombang di dalam satu dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

yang memenuhi syarat sempadan

$$U(0,t) = 0 \text{ dan } U(\ell,t) = 0 \text{ bagi semua } t,$$

dan syarat awal ialah

$$U(x,0) = f(x) \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = g(x)$$

(100/100)

3. Transformasi Laplace bagi suatu fungsi F(t) ditakrif sebagai

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \qquad s > 0$$

(a) Cari transformasi Laplace bagi

(i) e^{at}

(ii) sinh at

(20/100)

(b) Tunjukkan bahawa transformasi Laplace untuk fungsi Bessel $J_o(t)$ ialah $1/\sqrt{s^2+1}$

di sini $J_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (t/2)^{n+2r} \dfrac{1}{r!\,\Gamma(n+r+1)}$

(35/100)

(c) Teorem konvolusi menyatakan bahawa jika $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ dan $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)\,du$$

Gunakan formula ini untuk menilaikan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$$

(20/100)

...3/-

(d) Cari $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$

(25/100)

Perhatikan bahawa:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad s > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$$

di sini $f^{(n)}(s) = \dfrac{d^n}{ds^n} f(s)$, $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s-a}\} = e^{at}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

4. Fungsi Hermite ditakrifkan oleh

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

(a) Dengan menulis $f(x,t) = e^{2tx-t^2}$ dan dengan mengembangkannya di dalam suatu siri Taylor tunjukkan bahawa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

(30/100)

(b) Dapatkan $H_0(x)$, $H_1(x)$ dan $H_2(x)$. (15/100)

(c) Terbitkan hubungan jadi semula untuk fungsi Hermite, iaitu

(i) $2nH_{n-1}(x) = H_n'(x)$

(ii) $2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$.

(25/100)

(d) Tunjukkan bahawa polinom Hermite menepati persamaan pembezaan

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

(30/100)

- oooOooo -