

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
2009/2010 Academic Session

April/May 2010

**MAT 202 – Introduction to Analysis**  
***[Pengantar Analisis]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all three** [3] questions.

**Arahan:** Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. (a) (i) State the completeness axiom for  $\mathbb{R}$ . Define supremum and infimum for a nonempty set  $S \subset \mathbb{R}$ .  
( $\mathbb{R}$  = set of all real numbers)
- (ii) Find the supremum and infimum for the following sets if they exist.
- (a)  $A = \left\{ \sin x \mid 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$
- (b)  $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 > x^2 \text{ and } x > 0 \}$ .
- (b) Let  $A$  be a bounded nonempty set. Define  $B = \{ x+k \mid x \in A, k \in \mathbb{R} \}$ , where  $k$  is fixed. Show that  $\sup B = \sup A + k$  and  $\inf B = \inf A + k$ .
- (c) Let  $A, B$  and  $C$  be nonempty sets. Then show that  
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
- (d) Define a countable set.  
Show that the collection  $P$  of all polynomials  $p(x) = a_0 + a_1x$  with rational coefficients, that is  $a_0, a_1$  are rational number, is countable.
- (e) Let  $a_n = \left\{ \frac{1+2n}{3+4n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .
- (i) Determine the limit of  $a_n$ .
- (ii) Use the definition to verify the convergence of  $a_n$ .
- (iii) Find the smallest integer  $N$  such that  $\left| \frac{1+2n}{3+4n} - \frac{1}{2} \right| < 0.1$  for all  $n \geq N$ .

[100 marks]

2. (a) Let  $a_n$  and  $b_n$  be convergent sequences and suppose the  $a_n$  and  $b_n$  both converge to  $l$  and  $m$ , respectively. Show that the sequence  $a_n b_n$  converges to  $lm$ .
- (b) For each  $n \in \mathbb{N}$ , let  $I_n = [a_n, b_n]$  be a closed interval on  $\mathbb{R}$ . Given  $I_n \supset I_{n+1}$  then prove that  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ . Further more determine whether or not the sequence  $I_n = \left( 0, \frac{1}{n} \right)$  satisfies the above statement. Justify your answer.

1. (a) (i) Nyatakan aksion kelengkapan untuk  $\mathbb{R}$ . Takrifkan supremum dan infimum untuk suatu set tak kosong  $S \subset \mathbb{R}$ .  
( $\mathbb{R}$  = set semua nombor nyata)

(ii) Cari supremum dan infimum untuk set berikut jika wujud.

$$(a) \quad A = \left\{ \sin x \mid 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$(b) \quad A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 > x^2 \text{ dan } x > 0 \}.$$

- (b) Biar  $A$  set bukan kosong dan terbatas. Takrifkan  $B = x+k \mid x \in A, k \in \mathbb{R}$ , dimana  $k$  tetap. Tunjukkan bahawa  $\sup B = \sup A + k$  dan  $\inf B = \inf A + k$ .

- (c) Biar  $A, B$  dan  $C$  set tak kosong. Tunjukkan bahawa

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- (d) Takrifkan set terbilangkan.

Tunjukkan bahawa pungutan  $P$  bagi semua polinomial  $p(x) = a_0 + a_1x$  dengan pekali nisbah iaitu  $a_0, a_1$  nombor nisbah, adalah terbilangkan.

$$(e) \quad \text{Biar } a_n = \left\{ \frac{1+2n}{3+4n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (i) Tentukan had bagi  $a_n$ .

(ii) Guna takrifan untuk mengesahkan penumpuan  $a_n$ .

- (iii) Cari integer terkecil  $N$  supaya  $\left| \frac{1+2n}{3+4n} - \frac{1}{2} \right| < 0.1$  untuk semua  $n \geq N$ .

[100 markah]

2. (a) Biar  $a_n$  dan  $b_n$  jujukan menumpu dan andaikan  $a_n$  dan  $b_n$  keduanya menumpu kepada  $l$  dan  $m$ , masing-masing. Tunjukkan bahawa  $a_n b_n$  menumpu kepada  $lm$ .

- (b) Untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ , biar  $I_n = [a_n, b_n]$  selang tertutup pada  $\mathbb{R}$ . Diberi  $I_n \supset I_{n+1}$  buktikan bahawa  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ . Kemudian tentukan samada jujukan  $I_n = \left( 0, \frac{1}{n} \right)$  memenuhi pernyataan di atas. Tentusahkan jawapan anda.

- (c) Let  $a_n$  be a bounded sequence and each subsequence converges to the same number  $a$ . Show that the sequence  $a_n$  also converges to  $a$ .
- (d) Use the definition of Cauchy sequence to determine whether or not the sequence  $\left\{\frac{2^{n-1}}{2^n}\right\}$  is Cauchy.

[100 marks]

3. (a) Given  $\tau = \{-n, n : n \in \mathbb{N}\}$ , an open covering of a set  $A \subseteq \mathbb{R}$ , where  $A$  is a compact set. Show that  $A$  is closed.

- (b) Given a set  $A = [0, 1]$  and collection

$$\mathcal{G} = \left\{ \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left( \frac{1}{3}, 2 \right) \right\}.$$

- (i) Determine whether  $\mathcal{G}$  is an open covering for  $A$ . Give your reasons.  
 (ii) Use the definition of compactness (in terms of open covering) to show that  $A$  is not compact.

- (c) Given a set  $A = [2, 5] \setminus \mathbb{Q}$  [ $\mathbb{Q}$ =set of all rational numbers].

Find the interior points, accumulation/limit points and the isolated points.  
 Further more, determine whether  $A$  is open or closed or neither?

- (d) Given a function  $f(x) = \frac{1}{x}$ , show that this function is not uniformly continuous on  $(0, \infty)$  but uniformly continuous on  $(c, d)$ ,  $0 < c < d$ .

- (e) Given a function  $f_n$  defined on  $\mathbb{R}$  by  $f_n(x) = x^n$ , determine for what values of  $x$  on the given set, the sequence of function converges point wise. Next find the point wise limit of the sequence  $f_n$ .

[100 marks]

(c) Biar  $a_n$  jujukan terbatas dan setiap subjujukan menumpu kepada titik yang sama  $a$ . Tunjukkan bahawa  $a_n$  juga menumpu kepada  $a$ .

(d) Gunakan takrifan jujukan Cauchy untuk menentukan samada jujukan  $\left\{ \frac{2^{n-1}}{2^n} \right\}$  adalah Cauchy.

[100 markah]

3. (a) Diberi  $\tau = -n, n : n \in \mathbb{Z}$ , tudung terbuka bagi set  $A \subseteq \mathbb{Z}$ , di mana  $A$  adalah set padat. Tunjukkan bahawa  $A$  adalah tertutup.

(b) Diberi set  $A = [0, 1]$  dan pungutan

$$\mathcal{G} = \left\{ \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left( \frac{1}{3}, 2 \right) \right\}.$$

- (i) Tentukan bahawa  $\mathcal{G}$  adalah tudung terbuka bagi  $A$ . Berikan alasan anda.  
 (ii) Gunakan takrifan set padat (dalam bentuk tudung terbuka) untuk menunjukkan  $A$  bukan padat.

(c) Diberi set  $A = 2, 5 \setminus \mathbb{Q}$ . [ $\mathbb{Q}$  = set semua nombor nisbah].

Cari titik pedalaman, titik had dan titik terpencil.

Kemudian, tentukan samada  $A$  terbuka atau tertutup atau bukan keduanya?

(d) Diberi fungsi  $f(x) = \frac{1}{x}$ , tunjukkan bahawa fungsi ini tidak selanjat secara seragam pada  $(0, \infty)$  tetapi selanjat secara seragam pada  $(c, d)$ ,  $0 < c < d$ .

(e) Diberi suatu fungsi  $f_n$  ditakrifkan pada  $\mathbb{R}$  dengan  $f_n(x) = x^n$ , tentukan nilai  $x$  pada set yang diberi dimana jujukan fungsi menumpu titik demi titik. Kemudian cari titik demi titik had bagi jujukan  $f_n$ .

[100 markah]