
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2009/2010 Academic Session

April/May 2010

MAT 102 – Advanced Calculus
[Kalkulus Lanjutan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of seven pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all nine** [9] questions.

[Arahan: Jawab **semua sembilan** [9] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Find the limit, if it exists, or show that the limit does not exist.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\sin x}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x + 5x - 1)^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln(2x+1)$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \ln(x+y)$

(e) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$

[40 marks]

2. Suppose you know that a_n is a decreasing sequence and all its terms lie between the numbers 5 and 8.

- (a) Explain why the sequence has a limit.
- (b) What can you say about the value of the limit?
- (c) Does the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge or diverge? Give your reason.

[12 marks]

3. Test the convergence of each of the series using an appropriate test.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n! 2^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$

[32 marks]

1. Cari had, jika wujud, atau tunjukkan bahawa had tersebut tidak wujud.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (2e^x + 5x - 1)^{\frac{1}{x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln(2x+1)$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \ln(x+y)$$

$$(e) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

[40 markah]

2. Andaikan anda tahu a_n $\sum_{n=1}^{\infty}$ satu jujukan menyusut dan semua sebutannya terletak di antara nombor 5 dan 8.

(a) Jelaskan kenapa jujukan ini mempunyai had.

(b) Apa yang anda boleh katakan tentang nilai had tersebut?

(c) Adakah siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu atau mencapah? Beri alasan anda.

[12 markah]

3. Uji penumpuan setiap siri berikut dengan menggunakan ujian yang sesuai.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{n! 2^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

[32 markah]

4. Consider the power series

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

- (a) Find its radius and interval of convergence.
- (b) It is known that $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, $x \in [-1, 1]$. Show that the Taylor series of $\tan^{-1} x$ is given by

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

- (c) Hence show that $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

[30 marks]

5. (a) A perpetual annuity pays s dollars a year forever. With continuous fixed interest rate c , its present value is

$$y_0 = \int_0^{\infty} s e^{-ct} dt.$$

To receive \$1000 per year at $c=10\%$, how much money y_0 do you need to deposit?

- (b) The work to move a satellite (mass m) infinitely far from the Earth (radius R , mass M) is $W = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{x^2} dx$, where G is a constant. Evaluate W .

[14 marks]

6. The partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

is called the *Laplace equation*. Determine whether $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$ is a solution of Laplace's equation.

[10 marks]

4. Pertimbangkan siri kuasa

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

(a) Cari jejari dan selang penumpuannya.

(b) Adalah diketahui bahawa $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, $x \in [-1, 1]$. Tunjukkan bahawa siri Taylor untuk $\tan^{-1} x$ diberikan oleh

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(c) Seterusnya, tunjukkan bahawa $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

[30 markah]

5. (a) Satu anuiti kekal membayar s ringgit setahun untuk selamanya. Dengan kadar faedah tetap berterusan c , nilai kininya ialah

$$y_0 = \int_0^{\infty} s e^{-ct} dt.$$

Untuk menerima RM1000 setahun dengan $c=10\%$, berapakah jumlah wang y_0 yang anda perlu masukkan?

(b) Kerja untuk menggerakkan satu satelit (jisim m) tak terhingga jauhnya dari Bumi (jejari R , jisim M) ialah $W = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{x^2} dx$, dengan G suatu pemalar. Nilaikan W .

[14 markah]

6. Persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

disebut sebagai persamaan Laplace. Tentukan sama ada $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$ ialah penyelesaian untuk persamaan Laplace.

[10 markah]

7. The function $x=f(u,v)$ and $y=g(u,v)$ are defined implicitly by the equations $y-x^2+u+e^{u-v}=0$ and $x^3-y^2+u^2+v^2=0$. Find $\frac{\partial x}{\partial u}$ and $\frac{\partial x}{\partial v}$ at $(x,y,u,v)=(-1,-1,1,1)$.

[22 marks]

8. Suppose that $f(x,y)=x^2-4xy+y^3+4y$ for (x,y) in $\square^2$. Classify the critical points of f and find the local extrema.

[24 marks]

9. A double integral $\iint_R f$ reduces to iterated integral

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y) dy dx.$$

Determine the region R and reverse the order of the iterated integral.

[16 marks]

7. Fungsi-fungsi $x=f(u,v)$ dan $y=g(u,v)$ ditakrifkan secara tersirat oleh persamaan $y-x^2+u+e^{u-v}=0$ dan $x^3-y^2+u^2+v^2=0$. Cari $\frac{\partial x}{\partial u}$ dan $\frac{\partial x}{\partial v}$ pada $(x,y,u,v)=(-1,-1,1,1)$.

[22 markah]

8. Andaikan $f(x,y)=x^2-4xy+y^3+4y$ untuk (x,y) dalam $\square^2$. Kelaskan titik-titik genting untuk f dan cari ekstrema setempat.

[24 markah]

9. Satu kamiran berganda $\iint_R f$ diturunkan kepada kamiran terlelar

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y) dy dx.$$

Tentukan rantau R dan tukar tertib kamiran terlelar itu.

[16 markah]