
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2009/2010 Academic Session

April/May 2010

MAA 111 – Algebra for Science Students
[Aljabar untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all twelve** [12] questions.

[Arahan: Jawab **semua dua belas** [12] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Let $\mathbf{u}$ be a vector in $\mathbb{R}^4$, and the transformation $T:\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ given by

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{x}.$$

Is T a linear transformation? Justify your answer. If T is linear, then what is the standard matrix representation of T .

[8 marks]

2. Given a linear transformation $T:\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by

$$T(x, y, z, w) = (x + 2y + 3z, 2x + y + z + 2w, 4x + 5y + 7z + 2w)$$

Is T a one-to-one transformation? Justify your answer.

[6 marks]

3. Find the standard matrix representation for the linear transformation which rotate every vector counterclockwise through an angle $\pi/6$, then reflects to the x -axis then followed by reflection through the line $y = -x$.

[5 marks]

4. Suppose a system of linear equations has fewer equations than variables and you have found a solution to this system. Is it possible that your solution is the only one? Explain your answer.

[5 marks]

5. Consider the set vectors

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t+u \\ t+3u \\ t+s+v \\ u \end{pmatrix} : s, t, u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Is this set a subspace of $\mathbb{R}^4$? If so give a basis for this subspace and find its dimension.

[10 marks]

1. Biar u suatu vektor dalam $\mathbb{R}^4$, dan transformasinya $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ diberi sebagai

$$T \mathbf{x} = \mathbf{x} - \text{proj}_u \mathbf{x}.$$

Adakah T suatu transformasi? Berikan alasan pada jawapan anda. Jika T adalah linear, apakah matriks perwakilan bagi T .

[8 markah]

2. Diberi suatu transformasi linear $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yang ditakrifkan sebagai

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + y + z + 2w \\ 4x + 5y + 7z + 2w \end{pmatrix}$$

Adakah T suatu transformasi satu ke satu? Jelaskan jawapan anda.

[6 markah]

3. Cari matriks perwakilan bagi transformasi linear yang mana setiap vektor berputar lawan arah jam pada sudut $\pi/6$, dan kemudian dipantulkan pada paksi $-x$ diikuti dengan pantulan pada garis $y = -x$.

[5 markah]

4. Andaikan suatu sistem persamaan linear mempunyai persamaan yang kurang daripada pemboleh ubah dan anda telah mempunyai penyelesaian kepada sistem tersebut. Adakah berkemungkinan penyelesaian yang diperolehi itu unik? Jelaskan jawapan anda.

[5 markah]

5. Pertimbangkan set vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t+u \\ t+3u \\ t+s+v \\ u \end{pmatrix} : s, t, u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Adakah set ini suatu subruang bagi $\mathbb{R}^4$? Jika ya, berikan asas untuk subruang tersebut dan cari dimensinya.

[10 markah]

6. State whether each of the following statements are possible for the matrix equation $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. If possible then describe the solution whether there exists a unique solution, no solution or infinitely many solutions.
- (a) A is a 5×6 matrix, rank $A = 4$ and rank $A|\mathbf{b} = 4$.
 - (b) A is a 3×4 matrix, rank $A = 3$ and rank $A|\mathbf{b} = 2$.
 - (c) A is a 4×2 matrix, rank $A = 4$ and rank $A|\mathbf{b} = 4$.
 - (d) A is a 5×5 matrix, rank $A = 4$ and rank $A|\mathbf{b} = 5$.
 - (e) A is a 4×2 matrix, rank $A = 2$ and rank $A|\mathbf{b} = 2$.

[10 marks]

7. Suppose A is an $m \times n$ matrix of rank r , and E is an $n \times m$ elementary matrix. Let $B=EA$, indicate whether each statement is true or false.
- (a) A and B have the same null space.
 - (b) A and B have the same column space.
 - (c) A and B have the same bases for row space.

[6 marks]

8. Suppose $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ are orthonormal vectors in $\mathbb{R}^4$,
- (a) What is the length of the vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{q}_1 - 3\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_3$?
 - (b) Apply Gram-Schmidt process to the set of vectors $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{v}$ to get the set of four orthonormal vectors.

[10 marks]

9. Let V be subspace of $\mathbb{R}^4$ spanned by the three vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, and $\mathbf{v}_3$. If $\mathbf{u}$ is a vector in $\mathbb{R}^4$,
- (a) describe a technique to find the orthogonal projection of $\mathbf{u}$ on the subspace V by using a least squares solution of a linear system.
 - (b) can you find such vector in the question (a) by using Gram-Schmidt method? If so, describe the technique.

[10 marks]

6. Nyatakan sama ada setiap pernyataan berikut adalah berkemungkinan bagi persamaan matriks $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Jika ya, terangkan penyelesaiannya sama ada wujud suatu penyelesaian unik, tiada penyelesaian atau penyelesaian tak terhingga.
- (a) A ialah suatu matriks 5×6 , pangkat $A = 4$ dan pangkat $A|\mathbf{b} = 4$.
 - (b) A ialah suatu matriks 3×4 , pangkat $A = 3$ dan pangkat $A|\mathbf{b} = 2$.
 - (c) A ialah suatu matriks 4×2 , pangkat $A = 4$ dan pangkat $A|\mathbf{b} = 4$.
 - (d) A ialah suatu matriks 5×5 , pangkat $A = 4$ dan pangkat $A|\mathbf{b} = 5$.
 - (e) A adalah suatu matriks 4×2 , pangkat $A = 2$ dan pangkat $A|\mathbf{b} = 2$.

[10 markah]

7. Andaikan suatu A $m \times n$ yang berpangkat r , dan E adalah suatu matriks permulaan $n \times m$. Biar $B=EA$, nyatakan sama ada setiap pernyataan di bawah benar atau palsu.
- (a) A dan B mempunyai ruang nol yang sama.
 - (b) A dan B mempunyai ruang lajur yang sama.
 - (c) A dan B mempunyai asas yang sama bagi ruang baris.

[6 markah]

8. Andaikan $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ adalah vektor ortonormal dalam $\mathbb{R}^4$,
- (a) berapakah panjang vektor $\mathbf{v} = 2\mathbf{q}_1 - 3\mathbf{q}_2 - 2\mathbf{q}_3$?
 - (b) dapatkan set vektor ortonormal dengan mengaplikasikan kaedah Gram-Schmidt ke atas set vector $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{v}$.

[10 markah]

9. Biar V suatu subruang $\mathbb{R}^4$ yang direntangi oleh tiga vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$. Jika $\mathbf{u}$ adalah suatu vektor dalam $\mathbb{R}^4$,
- (a) terangkan teknik untuk mendapatkan unjuran orthogonal bagi $\mathbf{u}$ pada subruang V dengan menggunakan kaedah kuasa dua terkecil,.
 - (b) bolehkah vektor tersebut pada bahagian (a) diperolehi dengan menggunakan kaedah Gram-Schmidt? Jika ya, terangkan tekniknya.

[10 markah]

10. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- (a) Verify that the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is inconsistent.
- (b) Find the least square solution to the given linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (c) Is the least square solution in (b) unique? Explain your answer.

[10 marks]

11. (a) Describe the diagonalization method for an $n \times n$ matrix A .
- (b) Indicate whether each statement below is true or false.
- (i) A square matrix with n linearly independent column vectors is diagonalizable.
 - (ii) If A is diagonalizable and invertible then A^{-1} is diagonalizable.
 - (iii) If A is diagonalizable and invertible then A^T is diagonalizable.

[10 marks]

12. A is a 2×2 matrix and has the following two eigenvalues and eigenvectors:

$$\lambda_1 = 1 \text{ and } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \text{ and } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Find the matrix A .
- (b) Compute the matrix A^{101} .

[10 marks]

10. Biar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- (a) Tentusahkan bahawa sistem linear $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ini adalah tidak konsisten.
 (b) Cari penyelesaian kuasa dua terkecil untuk sistem linear $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.
 (c) Adakah penyelesaian kuasa dua terkecil yang diperlehi daripada (b) unik? Jelaskan jawapan anda.

[10 markah]

11. (a) Terangkan kaedah pempepenjuran bagi suatu matriks A $n \times n$.
 (b) Nyatakan sama ada setiap pernyataan dibawah adalah benar atau palsu.
 (i) Suatu matriks segiempat sama dengan n vektor lajur yang tidak bersandar linear adalah matriks terpepenjuran..
 (ii) Jika A terpepenjuran dan tersongsangkan, maka A^{-1} terpepenjuran
 (iii) Jika A terpepenjuran dan tersongsangkan maka A^T juga terpepenjuran .

[10 markah]

12. A adalah matriks yang bersaiz 2×2 mempunyai dua nilai eigen dan dua vector eigen seperti berikut:

$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \text{ dan } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Cari matriks A .
 (b) Kira matriks A^{101} .

[10 markah]