UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2009/2010 Academic Session

November 2009

MST 562 – Stochastic Processes
[Proses Stokastik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all ten** [10] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Suppose X is an exponential random variable with rate λ. Find $E[X \mid X > y]$ and subsequently, find $E[X - y \mid X > y]$.

[5 marks]

2. A Markov chain with state space {0, 1, 2, 3, 4} has transition matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Find all communicating classes and determine their periods.

[5 marks]

3. Suppose that the weather on any day depends on the weather conditions for the previous two days. If it was sunny today and yesterday, then it will be sunny tomorrow with probability 0.8; if it was sunny today but cloudy yesterday, then it will be sunny tomorrow with probability 0.6; if it was cloudy today but sunny yesterday, then it will be sunny tomorrow with probability 0.4; if it was cloudy for the last two days, then it will be sunny tomorrow with probability 0.1.

(i) Define the state at any time by the weather conditions during both that day and the previous day. Write out all the states so that the above model becomes a Markov chain and determine **P**, the transition probability matrix.
(ii) Given that it is sunny on Monday and Tuesday, what is the probability that it will be sunny on Thursday?
(iii) Find the stationary distribution of the Markov chain.
(iv) On what fraction of days in the long run is it sunny?

[15 marks]

4. Suppose that print jobs arrive at a network printer with independent and exponentially inter-arrival times with parameter 10 per hour. It takes the printer exactly 6 seconds to print each page. The sizes of the jobs are independent and identically distributed and have a Poisson distribution with a mean of 2 pages.

(i) Find the probability that precisely 20 jobs arrive between 8:30 hours and 10:30 hours?
(ii) What is the expected arrival time of the first job after 12:00 hours, when the previous job arrived at 11:58 hours?
(iii) Let $M(t)$ be the number of print jobs consisting of more than 3 pages that arrive in a time interval (0, t]. Give an expression for $P[M(t) = m]$.

[10 marks]

1. *Andaikan X adalah suatu pembolehubah rawak eksponen dengan kadar λ. Dapatkan* $E[X \mid X > y]$ *dan seterusnya dapatkan* $E[X - y \mid X > y]$.

[5 markah]

2. *Suatu rantai Markov mempunyai ruang keadaan {0, 1, 2, 3, 4} dan matriks peralihan*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cari semua kelas berkomunikasi dan tentukan kalaan kelas-kelas tersebut.

[5 markah]

3. *Andaikan cuaca pada sebarang hari bergantung kepada keadaan cuaca pada dua hari sebelumnya. Jika hari ini dan kelmarin cuaca terang, maka cuaca hari esok akan terang dengan kebarangkalian 0.8; jika hari ini cuaca terang tetapi cuaca redup pada hari sebelumnya, maka cuaca hari esok akan terang dengan kebarangkalian 0.6; jika hari ini cuaca redup tetapi cuaca terang pada hari sebelumnya, maka cuaca hari esok akan terang dengan kebarangkalian 0.4; jika cuaca redup pada dua hari sebelumnya, maka cuaca hari esok akan terang dengan kebarangkalian 0.1.*

(i) *Takrifkan keadaan pada sebarang masa dengan keadaan cuaca pada hari tersebut dan hari sebelumnya. Tuliskan semua keadaan supaya model di atas menjadi rantai Markov dan tentukan **P**, matriks kebarangkalian peralihannya.*

(ii) *Jika cuaca terang pada hari Isnin dan Selasa, apakah kebarangkalian bahawa cuaca akan terang pada hari Khamis?*

(iii) *Dapatkan taburan pegun bagi rantai Markov ini.*

(iv) *Dalam jangka masa panjang, berapakah pecahan hari di mana cuaca terang?*

[15 markah]

4. *Andaikan bahawa kerja-kerja cetakan tiba di sebuah pencetak rangkaian secara eksponen dengan masa antara ketibaan tertabur secara tak bersandar dengan parameter 10 sejam. Mesin pencetak mengambil masa tepat 6 saat untuk mencetak setiap halaman. Saiz kerja (untuk dicetak) tertabur secara secaman dan tak bersandar dan mempunyai suatu taburan Poisson dengan min 2 halaman.*

(i) *Cari kebarangkalian bahawa tepat 20 kerja cetakan tiba antara jam 8:30 pagi dan 10:30 pagi?*

(ii) *Apakah jangkaan masa tiba bagi kerja pertama selepas jam 12:00 tengah hari, jika kerja sebelumnya tiba pada jam 11:58 pagi?*

(iii) *Andaikan* $M(t)$ *mewakili bilangan kerja cetakan yang melibatkan 3 atau lebih halaman yang tiba dalam selang (0, t]. Berikan suatu ungkapan bagi* $P[M(t) = m]$.

[10 markah]

5. Suppose that a population consists of a fixed number, say *m*, of genes in any generation. Each gene is one of two possible genetic types. If any generation has exactly *i* (of its *m*) genes being type 1, then the next generation will have *j* type1 (and $m - j$ type 2) genes with probability

$$\binom{m}{j}\left(\frac{i}{m}\right)^{j}\left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-j}, \quad j = 0,1,\ldots,m$$

Let X_n denote the number of type 1 genes in the nth generation, and assume $X_0 = i$.

(i) Find $E[X_n]$.

(ii) What is the probability that eventually all the genes will be type 1?

[10 marks]

6. A small barbershop operated by a single barber has room for at most two customers. Potential customers arrive in a Poisson stream of 3 per hour. Successive service times (i.e. times to cut hair) are independent and identically exponential, with mean service time 15 minutes.

(i) Find the average number of customers in the shop.

(ii) Find the proportion of potential customers that enter the shop.

(iii) If the barber worked twice as fast, what proportion of customers would enter the shop?

[15 marks]

7. Let T_1, T_2, … denote the interarrival times of events of a non-homogeneous Poisson process having intensity function $\lambda(t)$.

(i) Are the T_i's independent and identically distributed? Explain.

(ii) Find the distribution of T_1, distribution of T_2.

(iii) If $\lambda(t) = 3t + 1$, what is the probability that *n* events occur between time $t = 3$ and $t = 5$?

[10 marks]

8. Mr. Lee works on a temporary basis. The mean length of each job he gets is 5 months. The amount of time that he spends between jobs is exponentially distributed with mean 3 months. Let a renewal correspond to the time when he starts a new job.

(i) Show that this is a delayed renewal process. What is the mean time between renewals?

(ii) At what rate per year does Mr. Lee get a new job?

(iii) What is the limiting probability that Mr. Lee is working?

(iv) What fraction of the time is he working?

[15 marks]

5. *Andaikan bahawa suatu populasi terdiri daripada suatu bilangan tetap, katakan m, gene di dalam sebarang suatu generasi. Setiap gene terdiri daripada satu daripada dua jenis gene yang mungkin. Jika sebarang generasi mempunyai tepat i (daripada m) gene jenis 1, maka generasi berikutnya akan mempunyai sebanyak j gene jenis 1 (dan m-j jenis 2) dengan kebarangkalian*

$$\binom{m}{j}\left(\frac{i}{m}\right)^{j}\left(\frac{m-i}{m}\right)^{m-j}, \quad j=0,1,\ldots,m$$

Andaikan X_n *adalah bilangan gene jenis 1 dalam generasi ke-n, dan andaikan* $X_0 = i$.

(i) *Cari* $E\lfloor X_n \rfloor$.
(ii) *Apakah kebarangkalian bahawa akhirnya semua gene adalah daripada jenis 1?*

[10 markah]

6. *Sebuah kedai gunting rambut yang kecil yang beroperasi dengan seorang penggunting, mempunyai ruang yang boleh memuatkan tidak lebih daripada dua orang pelanggan. Bakal pelanggan tiba mengikut suatu aliran Poisson seramai 3 orang sejam. Masa layan berturutan (iaitu tempoh untuk memotong rambut) adalah tertabur secara tak bersandar dan secaman, dengan min masa layan selama 15 minit.*

(i) *Cari purata bilangan pelanggan dalam kedai ini.*
(ii) *Cara peratusan bakal pelanggan yang memasuki kedai ini.*
(iii) *Sekiranya penggunting rambut bekerja dua kali lebih pantas, apakah kadaran pelanggan yang memasuki kedai ini?*

[15 markah]

7. *Andaikan* T_1, T_2, ... *menandakan masa antara ketibaan bagi peristiwa suatu proses Poisson tak homogen yang mempunyai fungsi intensiti* $\lambda(t)$.

(i) *Adakah* T_i *tak bersandar dan terabur secara secaman? Jelaskan.*
(ii) *Dapatkan taburan* T_1 *dan taburan* T_2.
(iii) *Jika* $\lambda(t) = 3t + 2$, *apakah kebarangkalian bahawa n peristiwa berlaku antara masa* $t = 2$ *dan* $t = 4$?

[10 markah]

8. *En. Lee bekerja secara sambilan. Min tempoh setiap kerja yang beliau dapat ialah 5 bulan. Tempoh masa yang habis antara pekerjaan bertaburan secara eksponen dengan min 3 bulan. Andaikan suatu pembaharuan bersamaan dengan masa bila beliau mula sesuatu pekerjaan baru.*

(i) *Tunjukkan bahawa ini adalah suatu proses pembaharuan tertunda. Apakah min masa antara pembaharuan?*
(ii) *Apakah kadar tahunan bagi En. Lee mendapat suatu pekerjaan baru?*
(iii) *Apakah kebarangkalian penghad bahawa En. Lee sedang bekerja?*
(iv) *Apakah pecahan masa beliau didapati sedang bekerja?*

[15 markah]

9. The conditional variance of *X* given the random variable *Y*, is defined by

$$Var(X|Y) = E\left[\,[X - E(X|Y)]^2 \mid Y\,\right]$$

Show that

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var(E[X|Y]).$$

[10 marks]

10. Write short notes on the following:

(i) recurrent state
(ii) transient state
(iii) stationary and independent increment

[5 marks]

9. *Varians bersyarat X , diberikan pembolehubah rawak Y, ditakrifkan oleh*

$$Var(X|Y) = E\left[\left[X - E(X|Y)\right]^2 \mid Y\right].$$

Tunjukkan

$$Var(X) = E\left[Var(X|Y)\right] + Var\left(E\left[X|Y\right]\right).$$

[10 markah]

10. *Tuliskan nota pendek mengenai yang berikut:*

(i) keadaan semulajadi
(ii) keadaan fana
(iii) peningkatan pegun dan tak bersandar

[5 markah]

- ooo O ooo -