UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2009/2010 Academic Session

November 2009

MSS 302 – Real Analysis
[Analisis Nyata]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all seven** [7] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua tujuh** [7] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. For each statement below, either prove it (if true) or provide a counter example (if false):

   (a) E is a measurable set if and only if $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ for any $A \subset E$ and any $B \subset E^c$.

   (b) If E is a countable set then E is measurable.

   (c) If E is a measurable set and $m(E) = 0$ then E is countable.

   (d) Every Borel set is a Lebesgue measurable set.

   (e) If f is a measurable function then so is $|f|$.

   (f) If $|f|$ is a measurable function then so is f.

   (g) Every continuous function on $[a,b]$ is Lebesgue integrable.

   (h) The Monotone Convergent Theorem applies for decreasing sequences of functions.

   (i) If $f \geq 0$ is a measurable function on E, then $\int_E f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ almost everywhere on E.

   (j) If $f \in L^1(X) \cap L^2(X)$, then $f \in L^p(X)$ for every $p \in [1,2]$.

[40 marks]

2. (a) What is the Lebesgue integral of a non-negative measurable function f on X? What does it mean to say a measurable function f on X is Lebesgue integrable? Give an example of a Lebesgue integrable function, and an example of a function that is not Lebesgue integrable.

   (b) State the Lebesgue Dominated Convergent Theorem, and prove the theorem.

[10 marks]

3. Let $X \subset \mathbb{R}$ and (X, M_X, m) a Lebesgue measure space.

   (a) State the definition of the norm $\|.\|_p$ for $p \in [1,\infty)$ in $L^P(X)$ vector spaces.

   (b) Explain why these quantities $\|.\|_p$ are well-defined and why $L^P(X)$ becomes a normed vector space.

   (c) Prove the triangle inequality in $L^P(X)$ for $p \in [1,\infty)$.

[10 marks]

4. Let H be a Hilbert space with inner product $\langle . | . \rangle$. Let (x_n) be a sequence in H.

   (a) What does it mean to say that $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is an orthonormal set in H?

   (b) What does it mean to say that $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a complete orthonormal set in H?

1. *Untuk setiap penyataan di bawah, buktikan apabila penyataan benar atau berikan contoh apabila penyataan salah:*

   (a) *E adalah set tersukatkan jika dan hanya jika* $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ *untuk sebarang* $A \subset E$ *dan* $B \subset E^c$.

   (b) *Jika E adalah set terbilangkan maka E adalah tersukatkan.*

   (c) *Jika E adalah set tersukatkan dan* $m(E) = 0$ *maka E adalah terbilangkan.*

   (d) *Setiap set Borel adalah set tersukatkan secara Lebesgue.*

   (e) *Jika f adalah fungsi tersukatkan maka* $|f|$ *juga fungsi tersukatkan.*

   (f) *Jika* $|f|$ *adalah fungsi tersukatkan maka f juga fungsi tersukatkan.*

   (g) *Setiap fungsi selanjar pada* $[a,b]$ *adalah terkamirkan secara Lebesgue.*

   (h) *Teorem Ekanada Menumpu adalah untuk fungsi jujukan menyusut.*

   (i) *Jika* $f \geq 0$ *adalah fungsi tersukatkan pada E, maka* $\int_E f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *hampir di mana-mana pada E.*

   (j) *Jika* $f \in L^1(X) \cap L^2(X)$, *maka* $f \in L^p(X)$ *untuk setiap* $p \in (1,2)$.

[40 markah]

2. (a) *Apakah kamiran Lebesgue bagi suatu fungsi tersukatkan yang tak negatif f pada X? Apakah yang dimaksudkan dengan suatu fungsi tersukatkan pada X adalah terkamirkan secara Lebesgue. Beri satu contoh suatu fungsi terkamirkan secara Lebesgue dan beri satu contoh suatu fungsi tak terkamirkan secara Lebesgue.*

   (b) *Nyatakan Teorem Menumpu Terdominasi Lebesgue dan buktikan teorem tersebut.*

[10 markah]

3. *Andaikan* $X \subset \mathbb{R}$ *dan* (X, M_X, m) *suatu ruang sukatan Lebesgue.*

   (a) *Nyatakan definisi norma* $\|\cdot\|_p$ *bagi* $p \in [1,\infty)$ *dalam ruang vektor* $L^P(X)$.

   (b) *Terangkan mengapa kuantiti* $\|\cdot\|_p$ *adalah terdefinisikan rapi dan mengapa* $L^P(X)$ *menjadi suatu ruang vektor norma.*

   (c) *Buktikan ketaksamaan segitiga dalam* $L^P(X)$ *bagi* $p \in [1,\infty)$.

[10 markah]

4. *Andaikan H suatu ruang Hilbert dengan hasil darab terkedalam* $\langle \cdot | \cdot \rangle$. *Andaikan* (x_n) *adalah suatu jujukan dalam H.*

   (a) *Apakah yang dimaksudkan dengan* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *adalah suatu set ortonormal dalam H?*

   (b) *Apakah yang dimaksudkan dengan* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *adalah suatu set ortonormal lengkap dalam H?*

(c) Prove that if $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a complete orthonormal set in H, then $\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h|x_n\rangle|^2$ for any $h \in H$.

[10 marks]

5. Consider the Hilbert space $H = L^2[-1,1]$ of Lebesgue measurable real valued functions on $[-1,1]$ with inner product $\langle f|g\rangle := \int_{[-1,1]} fg\,dm$. A function f in H is said to be even if $f(-x) = f(x)$ and odd if $f(-x) = -f(x)$ for all $x \in [-1,1]$.

(a) Prove that the set V_e of all even functions in H is a closed subspace of H.

(b) Identify $V_e^{\perp}$, and prove your answer.

(c) Prove that for any $h \in H$, there are unique functions $f_e \in V_e$ and odd function f_o such that $f = f_e + f_o$.

(d) Show that the map $f \in H \mapsto f_e$ is a projection of H onto the subspace V_e.

[10 marks]

6. Let H be a Hilbert space.

(a) What does it mean to say that a linear operator T on H is bounded? Give the definition of the operator norm $\|T\|$.

(b) What is the adjoint T^* of a bounded linear operator T on a Hilbert space H? Is T^* bounded? What can you say about the norm of $\|T^*\|$? Justify your answers.

(c) Prove that every bounded linear operator T on H has an adjoint.

[10 marks]

7. Let $M : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ be defined by $M(f)(x) = xf(x)$. Show that M is a bounded linear operator with $\|M\| = 1$, and is self adjoint.

[10 marks]

(c) *Buktikan jika* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *adalah suatu set ortonormal lengkap dalam H, maka* $\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h|x_n\rangle|^2$ *untuk sebarang* $h \in H$.

[10 markah]

5. *Pertimbangkan ruang Hilbert* $H = L^2[-1,1]$ *bagi fungsi tersukatkan nyata secara Lebesgue pada* $[-1,1]$ *dengan hasil darab terkedalam* $\langle f|g\rangle := \int_{[-1,1]} fg\, dm$. *Suatu fungsi f dalam H disebut genap jika* $f(-x) = f(x)$ *dan ganjil jika* $f(-x) = -f(x)$ *untuk semua* $x \in [-1,1]$.

(a) *Buktikan set* V_e *bagi semua fungsi genap dalam H adalah subruang tertutup bagi H.*

(b) *Tentukan* $V_e^{\perp}$, *dan buktikan jawapan anda.*

(c) *Buktikan bahawa untuk sebarang* $h \in H$, *terdapat fungsi unik* $f_e \in V_e$ *dan fungsi ganjil* f_o *sedemikian* $f = f_e + f_o$.

(d) *Tunjukkan bahawa pemetaan* $f \in H \mapsto f_e$ *adalah suatu unjuran bagi H keseluruh subruang* V_e.

[10 markah]

6. *Andaikan H suatu ruang Hilbert.*

(a) *Apakah yang dimaksudkan dengan suatu operator linear T pada H adalah terbatas? Berikan definisi operator norma* $\|T\|$.

(b) *Apakah dampingan* T^* *bagi suatu operator linear terbatas T pada ruang Hilbert H? Adakah* T^* *terbatas? Apakah yang dapat anda katakan mengenai norma bagi* $\|T^*\|$? *Jelaskan jawapan anda.*

(c) *Buktikan bahawa setiap operator linear terbatas T pada H mempunyai dampingan.*

[10 markah]

7. *Andaikan* $M : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ *ditakrifkan sebagai* $(Mf)(x) = xf(x)$. *Tunjukkan bahawa M adalah operator linear terbatas dengan* $\|M\| = 1$, *dan adalah swadampingan .*

[10 markah]

- ooo O ooo -