

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
2009/2010 Academic Session

November 2009

**MAT 514 – Mathematical Modelling**  
***[Pemodelan Matematik]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all five** [5] questions.

**Arahan:** Jawab **semua lima** [5] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

1. (a) In a certain chemical reaction, the rate of conversion of a substance at time  $t$  is proportional to the quantity of the substance still untransformed at that instant. At the end of one hour 60 grams remain and at the end of four hours 21 grams. How many grams of the first substance were there initially?  
[5 marks]
- (b) The air in a room with dimension  $40ft \times 15ft \times 10ft$  contains 25% carbon dioxide. Find the percentage of carbon dioxide in the room at the end of 50 minutes if fresh air with 3% carbon dioxide is admitted at the rate of 45 cubic feet per minute.  
[10 marks]
2. (a) Formulate a mathematical model for an epidemic deterministic model with  $n$  susceptible persons in the population and 1 infected person being introduced into the population at a given time  $t$ . Also, obtain the expression for the number of infected persons in the population at any time  $t$  if a susceptible person is infected at a rate proportional to  $SI$  and an infected person recovers and becomes susceptible again at a rate  $\gamma I$ .  
[15 marks]
- (b) Find the time required to empty a cylindrical tank 8ft long and 4ft in diameter through a 2 inch circular hole in the bottom if the tank is initially full of water and its axis is vertical (assume  $v = 4.8\sqrt{h}$ ).  
[10 marks]
3. (a) A farmer has 10 acres to plant in wheat and rye. He has to plant at least 7 acres. However, he has only \$1200 to spend and each acre of wheat costs \$200 to plant and each acre of rye costs \$100 to plant. Moreover, the farmer has to get the planting done in 12 hours and it takes an hour to plant an acre of wheat and 2 hours to plant an acre of rye. If the profit is \$500 per acre of wheat and \$300 per acre of rye, how many acres of each should be planted to maximize profits?  
[5 marks]
- (b) A man rows with constant velocity ' $v$ ' across a stream of width ' $a$ ' always heading directly for the opposite bank. If the velocity of the stream varies directly as the product of the distances from the two banks, find the equation of the path of the man. How far downstream of his starting point does he land?  
[5 marks]

1. (a) Dalam satu tindak balas kimia tertentu, kadar penukaran satu bahan pada ketika  $t$  adalah berkadaran dengan kuantiti bahan yang masih tidak berubah pada ketika itu yang sama. Pada akhir satu jam 60 gram kekal dan di akhir empat jam 21 gram kekal. Berapa gram bahan pertama wujud pada mulanya?  
[5 markah]
- (b) Udara dalam sebuah bilik berdimensi 40 kaki  $\times$  15 kaki  $\times$  10 kaki mengandungi 25% karbon dioksida. Cari peratusan karbon dioksida dalam bilik itu di akhir 50 minit jika udara segar dengan 3% karbon dioksida dibenarkan masuk pada kadar 45 kaki padu setiap minit.  
[10 markah]
2. (a) Formulasikan suatu model matematik untuk satu model berketentuan wabak dengan  $n$  orang-orang rentan, dalam populasi dan 1 orang yang dijangkiti diperkenalkan kepada populasi pada satu diberi masa  $t$ . Dapatkan juga pernyataan untuk jumlah orang-orang yang dijangkiti dalam populasi pada bila-bila masa  $t$  jika satu orang rentan dijangkiti pada suatu kadar berkadaran dengan  $SI$  dan satu orang yang dijangkiti pulih dan rentan sekali lagi pada suatu kadar  $\gamma I$ .  
[15 markah]
- (b) Cari masa dikehendaki untuk mengosongkan satu tangki silinder 8 kaki panjang dan diameter 4 kaki melalui lubang bulat 2 inci atas dasar jika tangki pada mulanya penuh air dan paksinya adalah tegak.  
[10 markah]
3. (a) Seorang petani mempunyai 10 ekar untuk tanam dalam gandum dan rai. Dia perlu tanam sekurang-kurangnya 7 ekar. Bagaimanapun, dia hanya mempunyai \$1200 untuk dibelanjakan dan ekar kos menanam seekar gandum \$200 dan kos menanam seekar rai \$100. Tambahan pula, petani terpaksa membuat penanaman dalam masa 12 jam dan ia mengambil satu jam untuk tanam satu ekar gandum dan 2 jam untuk tanam satu ekar rai. Jika keuntungan adalah \$500 bagi setiap ekar gandum dan \$300 bagi setiap ekar rai, berapakah ekar setiap tanaman yang harus ditanam untuk memaksimumkan keuntungan?  
[5 markah]
- (b) Seorang lelaki mengayuh dengan halaju malar 'v' merentasi satu sungai kelebaran "a" dan sentiasa menuju secara langsung untuk pantai bertentangan. Jika halaju sungai itu berubah secara langsung mengikut produk jarak daripada dua buah tepian sungai, cari persamaan lintasan lelaki. Bagaimana jauh ke hilir titik permulaannya dia sampai?  
[5 markah]

4. (a) Obtain the governing differential equations of the microbial growth in a chemostat through mathematical modeling and discuss the stability of steady states for chemostat.

[15 marks]

- (b) An horizontal beam of length ' $2l$ ' ft is freely supported at both ends. Find the equation of its elastic curve and its maximum deflection if the load is ' $w$ ' per unit length.

[10 marks]

5. (a) The whirling speed of a shaft of length ' $l$ ' is given by  $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4y = 0$ , where  $a^4 = \frac{\rho\omega^2}{gEI}$  and  $y$  is the displacement at a distance  $x$  from one end. If the ends of the shafts are constrained in short bearings, find the critical speed of rotation.

[15 marks]

- (b) A uniform horizontal strut of length  $l$ , freely supported at both ends, carries a uniformly distributed load  $w$  per unit length. If the thrust at each end is  $P$ , prove that the maximum deflection is

$$\frac{w}{Pa^2} \left( \sec\left(\frac{al}{2}\right) - 1 \right) - \frac{wl^2}{8P}, \text{ where } \frac{P}{EI} = a^2. \text{ Prove also that the}$$

$$\text{maximum bending moment is of magnitude } \frac{w}{a^2} \left( \sec\left(\frac{al}{2}\right) - 1 \right).$$

[10 marks]

4. (a) Dapatkan persamaan pembezaan untuk pertumbuhan mikrob dalam satu kemostat melalui pemodelan matematik dan bincangkan kestabilan keadaan-keadaan mantap untuk kemostat.

[15 markah]

- (b) Satu pancaran ufuk panjang '2l' kaki disokong pada kedua-dua hujung. Cari persamaan lengkung kenyalnya dan pesongan maksimumnya jika beban adalah 'w' per unit panjang.

[10 markah]

5. (a) Kelajuan berlegar sebuah batang panjang 'l' adakah diberi oleh  $\frac{d^4 y}{dx^4} - \alpha^4 y = 0$ , di mana  $\alpha^4 = \frac{\rho \omega^2}{gEI}$  dan y adalah sesaran pada satu jarak x daripada satu hujung. Jika hujung batang itu adalah dikekang, cari halaju genting putaran.

[15 markah]

- (b) Satu topang ufuk seragam yang panjangnya l, disokong pada kedua-dua hujung dan membawa satu beban yang diagihkan dengan seragam sebanyak w per unit panjang. Jika daya tolakan pada setiap hujung adalah P, buktikan bahawa pesongan maksimum adalah  $\frac{\omega}{Pa^2} \left( \sec\left(\frac{al}{2}\right) - 1 \right) - \frac{\omega l^2}{8P}$ , di mana  $\frac{P}{EI} = \alpha^2$ . Buktikan juga yang momen lentur maksimum bermagnitud  $\frac{\omega}{a^2} \left( \sec\left(\frac{al}{2}\right) - 1 \right)$ .

[10 markah]