UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1991/92

Okt/Nov 1991

MSG442 - Kaedah Unsur Terhingga

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Di dalam perumusan Galerkin bagi masalah 1-dimensi, nyatakan bagaimana fungsi berpemberat W_s dipilih. Lakarkan W_s bagi kesemua 5 node dalam suatu domain yang terdiri daripada empat unsur linear.

   (b) Apakah perhubungan di antara lebar jalur (bandwidth) dan penomboran nod-nod? Terangkan mengapa lebar jalur biasanya diminimumkan.

   (c) Apakah suatu sistem koordinat asli? Berikan satu contoh 2-dimensi.

   (d) Buktikan keselanjaran fungsi ϕ di sepanjang sempadan dua unsur segiempat linear.

   (*100/100*)

2. (a) Berikan tafsiran fizikal untuk syarat sempadan terbitan berikut

$$D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta = - M \phi_b + S$$

   dengan D_x, D_y, M dan S sebagai pemalar-pemalar.

   Tunjukkan bagaimana persamaan ini menyumbang kepada kamiran-kamiran unsur dalam perumusan Galerkin.

   (b) Bagi masalah yang bersandarkan masa

$$D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

.../2

tunjukkan bahawa kamiran sisa berbentuk

$$\left\{R^{(e)}\right\} = \left\{R^{(e)}_{D}\right\} + \left\{R^{(e)}_{\lambda}\right\}$$

Dengan menggunakan perumusan konsisten, dapatkan sistem persamaan berikut:

$$[C]\left\{\frac{d\Phi}{dt}\right\} + [K]\{\Phi\} - \{F\} = \{0\}$$

(c) Suatu unsur segitiga dengan nod-nod i, j dan k mempunyai koordinat-koordinat (0,0), (b,0) dan (c,d) masing-masing. Jika koefisien-koefisien $D_x = D_y = D$, dapatkan matriks unsur $[k^{(e)}]$.

Jika semua unsur bukan pepenjuru mesti negatif, deduksikan bahawa semua sudut pedalaman segitiga mesti kurang dari 90°.

(*100/100*)

(3) (a) Terangkan secara ringkas apakah *Kuadratur Gauss*.

(b) Berikan bentuk polinomial interpolasi bagi

(i) unsur segitiga linear
(ii) unsur segiempat bilinear
(iii) unsur segitiga kuadratik 6-nod
(iv) unsur segiempat 8-nod.

(c) Suatu unsur segiempat 8-nod mempunyai bucu-bucu pada (10,10), (20,15), (25,30) dan (8,25) di dalam sistem koordinat sejagat Oxy. Anggapkan bahawa transformasi koordinat ke sistem koordinat asli (ξ,η) boleh dilaksanakan dengan menggunakan fungsi-fungsi bentuk linear, nilaikan terbitan-terbitan

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N_1}{\partial y}$$

pada titik $\xi = \eta = 0.5$.

(*100/100*)

.../3

4. (a) Dapatkan fungsi bentuk N_3 (penomboran nod seperti yang digunakan dalam kuliah) bagi bucu suatu unsur segiempat tepat 8-nod.

(b) TDFIELD merupakan suatu program komputer yang digunakan dalam kursus ini untuk menyelesaikan masalah medan dua-dimensi dengan unsur linear. Apakah perubahan-perubahan utama yang perlu diadakan jika unsur-unsur isoparametrik yang berdarjah lebih tinggi digunakan?

(c) Berikan fungsian yang sesuai untuk masalah berikut:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q = 0. \qquad (*)$$

tertakluk kepada syarat $\phi = \phi_0$ pada sempadan Γ.

Tunjukkan bahawa persamaan (*) ialah persamaan Euler-Lagrange bagi fungsian itu.

Jika syarat-syarat sempadan adalah

$$\phi = \phi_0 \qquad \text{pada bahagian sempadan } \Gamma_1$$

dan

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + q + h(\phi - \phi_f) = 0 \qquad \text{pada } \Gamma_2$$

dengan q, h dan ϕ_f sebagai pemalar-pemalar dan $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, apakah fungsian yang sepadan?

(100/100)

- oooOOQooo -

Unsur Linear 1-D

$$\left[k^{(e)}\right] = \frac{D}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left\{f^{(e)}\right\} = \frac{QL}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Unsur Segitiga Linear

$$N_i = [a_i + b_i x + c_i y]/(2A), \quad N_j = [a_j + b_j x + c_j y]/(2A)$$
$$N_k = [a_k + b_k x + c_k y]/(2A)$$

dengan

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}$$

dan

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j$$
$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k$$
$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i$$

$$\left[k_D^{(e)}\right] = \frac{D_x}{4A}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_G^{(e)}\right] = \frac{GA}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \left\{f^{(e)}\right\} = \frac{QA}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left[k_M^{(e)}\right] = \frac{ML_{ij}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{dll.}$$

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c \, dA = \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!} 2A$$

Unsur Segiempat Tepat Bilinear

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_k = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad N_m = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_i = \left(1-\frac{s}{2b}\right)\left(1-\frac{t}{2a}\right), \qquad N_j = \frac{s}{2b}\left(1-\frac{t}{2a}\right)$$

$$N_k = \frac{st}{4ab}, \qquad N_m = \frac{t}{2a}\left(1-\frac{s}{2b}\right)$$

$$\left[k_D^{(e)}\right] = \frac{D_x a}{6b}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{D_y b}{6a}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_G^{(e)}\right] = \frac{GA}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \left\{f^{(e)}\right\} = \frac{QA}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left[k_M^{(e)}\right] = \frac{ML_{ij}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{dll.}$$

Unsur Kuadratik 1-D

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), \qquad N_2 = -(\xi+1)(\xi-1), \qquad N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

Unsur Segitiga Kuadratik 6-Nod

$$N_1 = L_1(2L_1-1), \qquad N_2 = 4L_1L_2,$$

$$N_3 = L_2(2L_2-1), \qquad N_4 = 4L_2(1-L_1-L_2)$$

$$N_5 = 1 - 3(L_1+L_2) + 2(L_1+L_2)^2, \qquad N_6 = 4L_1(1-L_1-L_2)$$

(MSG 442)

Unsur Segiempat Kuadratik 8-Nod

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

Kuadratur Gauss-Legendre

$n=1$	$\xi_i = 0.0$	$W_i = 2.0$
$n=2$	$\xi_i = \pm 0.577350$	$W_i = 1.0$
$n=3$	$\xi_i = 0.0$	$W_i = 8/9$
	$\xi_i = \pm 0.774597$	$W_i = 5/9$
$n=4$	$\xi_i = \pm 0.861136$	$W_i = 0.347855$
	$\xi_i = \pm 0.339981$	$W_i = 0.652145$

Untuk Domain Segitiga

n	Titik	L_1	L_2	W_i
2	*a*	1/3	1/3	1/2
3	*a*	1/2	0	1/6
	b	1/2	1/2	1/6
	c	0	1/2	1/6

Masalah Bersandarkan Masa

$$\left([C] + \theta\Delta t[K]\right)\{\Phi\}_b = \left([C] - (1-\theta)\Delta t[K]\right)\{\Phi\}_a + \Delta t\left((1-\theta)\{F\}_a + \theta\{F\}_b\right)$$

Perumusan Konsisten

$$\left[C^{(e)}\right] = \frac{\lambda L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \left[C^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[C^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta t > \frac{\lambda L^2}{6D\theta}, \qquad \Delta t < \frac{\lambda L^2}{12D(1-\theta)}$$

Perumusan Tergumpal

$$\left[C^{(e)}\right] = \frac{\lambda L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[C^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[C^{(e)}\right] = \frac{\lambda A}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta t < \frac{\lambda L^2}{4D(1-\theta)}$$